Calcul de la surface des pommes et des poires en vue d'études comparatives sur les échanges gazeux

par **P. MARCELLIN**
INGÉNIEUR AGRONOME

et **J. RANTZ**
INGÉNIEUR ADJOINT DU GÉNIE RURAL.

Il a été fréquemment fait allusion dans cette Revue à l'importance des échanges gazeux dans la vie des fruits. La respiration, l'émission d'eau, d'éthylène, de substances organiques volatiles sont importantes à considérer pour qui veut conserver ou transporter des fruits à l'état frais, leur faire subir un enrobage huileux ou cireux sans entraîner la fermentation, les conserver en emballage peu perméable, etc. Or ces diverses substances libérées par les fruits sont émises par la surface libre. Pour faire des comparaisons ou exprimer des résultats expérimentaux, c'est donc non seulement à l'unité de poids mais aussi à l'unité de surface qu'il faut rapporter les valeurs numériques. Malheureusement, il n'est pas très simple de connaître la surface d'un fruit. La méthode qui consiste à l'éplucher et à obtenir la surface par pesée ou par mesure directe sur un papier millimétrique est approximative. C'est la raison pour laquelle j'ai attiré l'attention de deux ingénieurs de la Station du froid sur le sujet. Dans l'article ci-dessous sont décrites, avec le minimum de considérations mathématiques, les méthodes qu'ils ont proposées. Ces méthodes m'ont paru suffisamment simples pour pouvoir rendre service à ceux qui s'intéressent, à des titres divers, à la physiologie des fruits. Elles ne sont valables que pour des fruits de forme régulière, c'est-à-dire offrant une symétrie axiale.

R. ULRICH

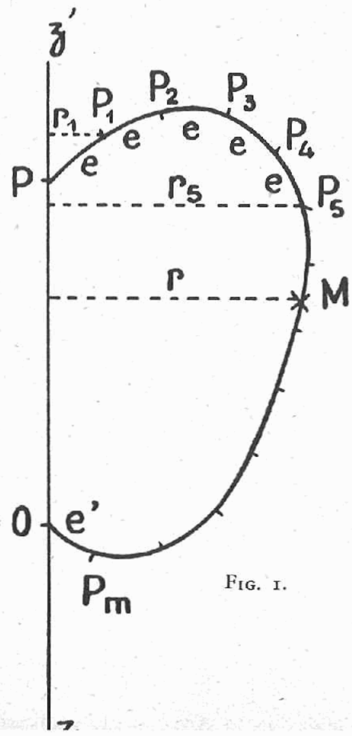

FIG. 1.

Pour permettre les comparaisons, les échanges gazeux des fruits (respiration, transpiration, etc.) sont rapportés d'ordinaire à l'unité de masse ou à l'unité de surface de l'organe. Or, la mesure de la surface n'est pas très aisée lorsque le fruit, quoiqu'offrant approximativement une forme de révolution, n'est pas un solide géométrique défini. Nous proposons ci-dessous trois méthodes applicables aux pommes et aux poires. Nous rappelons toutefois auparavant que BATEN et MARSHALL (1) ont antérieurement calculé la surface des pommes en utilisant une formule relative à un ellipsoïde à trois axes inégaux, de forme aussi proche que possible de celle du fruit considéré.

Première méthode.

On coupe dans le fruit à étudier, suivant un plan méridien, une tranche de quelques millimètres d'épaisseur. Cette tranche doit représenter les dimensions moyennes du fruit. Son contour est ensuite fixé sur un papier photographique. A cet effet, la tranche du

(1) *Journ. agric. Res.*, 1943, *66*, 357-73.

fruit est simplement appliquée sur le papier à impressionner par le poids d'une plaque de verre, puis on éclaire avec un faisceau de rayons perpendiculaires au plan de la coupe. Disposant du contour de la tranche de fruit, on cherche à placer, sensiblement suivant la direction pédoncule-œil, un axe de symétrie $z'\,z$ (fig. 1). On détermine ensuite par le calcul la surface du solide de révolution engendré par la figure tournant autour de l'axe. Il est rare que la symétrie d'un fruit soit parfaite. Aussi est-il bon d'appliquer les formules de calcul à chacune des moitiés de la coupe, et de faire les moyennes arithmétiques des valeurs obtenues.

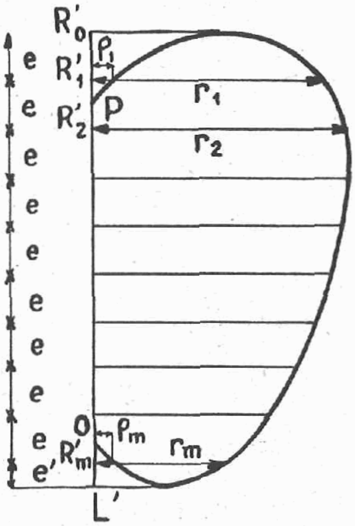

FIG. 2.

Rappelons que la surface S du solide est donnée par :

$$S = 2\,\pi \int_{P}^{O} r\,ds \tag{1}$$

r désignant la distance à PO d'un point M de la méridienne, ds un élément d'arc de la méridienne.

Appliquons cette formule au fruit. Inscrivons pour cela dans la méridienne une ligne brisée P P_1 P_2 ..... P_m dont tous les côtés sont égaux à une longueur e assez petite pour que l'on puisse confondre avec e la longueur de tout arc de la méridienne sous-tendu par un côté de la ligne brisée (fig. 1). Pratiquement, on a choisi $e \sharp$ 0,5 cm ou $e \sharp$ 1 cm pour les fruits étudiés. On pose $P_m\,O = e' < e$; on appelle $r_1\ r_2$ ..... r_m les distances de P_1, P_2 ..... P_m à PO. Selon que m est pair ou impair, on pose $m = 2\,n$ ou $m = 2\,n + 3$. La surface S_{2n} engendrée par l'arc P P_{2n} est calculée par la formule de Simpson, soit :

$$S_{2n} = \frac{2\,\pi\,e}{3}\,(4\,r_1 + 2\,r_2 + 4\,r_3 + \dots + 4\,r_{2n-3} + 2\,r_{2n-2} + 4\,r_{2n-1} + r_{2n}) \tag{2}$$

Quand m est impair, on prend pour valeur approchée de l'aire engendrée par $P_{2n}\,P_{2n+3}$ la valeur :

$$2\,\pi\,e\,\frac{3}{8}\,(r_{2n} + 3\,r_{2n+1} + 3\,r_{2n+2} + r_{2n+3})$$

$$= \frac{2\,\pi\,e}{3}\,(1{,}125\,r_{2n} + 3{,}375\,r_{2n+1} + 3{,}375\,r_{2n+2} + 1{,}125\,r_{2n+3})$$

(Formule de Cotes pour trois intervalles).

Dans tous les cas, on prend pour valeur approchée de l'aire engendrée par P_m O la valeur : $\pi\,e'\,r_m$.

On évaluera donc S par l'une des formules (3) et (4) selon que m est pair ou impair :

$$S = 2\,\pi\left[\frac{e}{3}\,(4\,r_1 + 2\,r_2 + 4\,r_3 + \dots + 4\,r_{2n-3} + 2\,r_{2n-2} + 4\,r_{2n-1} + r_{2n}) + \frac{e'\,r_{2n}}{2}\right] \tag{3}$$

$$S = 2\,\pi\left[\frac{e}{3}\,(4\,r_1 + 2\,r_2 + 4\,r_3 + \dots + 4\,r_{2n-1} + 2{,}125\,r_{2n} + 3{,}375\,r_{2n+1} + 3{,}375\,r_{2n+2} + 1{,}125\,r_{2n+3}) + \frac{e'\,r_{2n+3}}{2}\right] \tag{4}$$

Pratiquement, le calcul de la surface du fruit se fera de la manière suivante :

a) reproduire sur un calque la demi-méridienne P M O du fruit considéré, et inscrire dans cette courbe un polygone de côté e en reportant au compas une longueur e voisine de 1 cm ou de 0,5 cm par exemple (fig. 1). On construit à part 10 segments égaux à e placés bout à bout sur une ligne droite, et on mesure 10 e ; on « étalonne » ainsi l'ouverture e utilisée ;

b) appliquer le calque sur un papier à quadrillage millimétrique et lire les rayons 0, r_1, r_2 ..... r_m, 0, distances des sommets du polygone inscrit à l'axe $z'z$;

c) multiplier respectivement 0 par 1, r_1 par 4, r_2 par 2 ..... avec comme liste des coefficients (k) : 1 ; 4 ; 2 ; 4 ; 2 ; ..... liste se terminant par 4 ; 2 ; 4 ; 1 si le nombre des rayons, non compté le 0 commençant la liste, est pair ; les dernières valeurs de k deviennent : 2 ; 4 ; 2,125 ; 3,375 ; 3,375 ; 1,125 si le nombre des

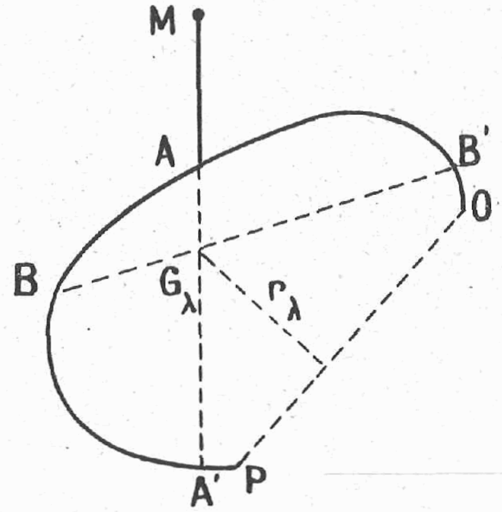

FIG. 3. — Détermination du centre de gravité G_λ d'un fil métallique ayant la forme d'une méridienne (c'est-à-dire d'un profil) du fruit. On suspend ce fil en M par un fil souple fin MA dont le prolongement couperait le profil en A'. Si l'on recommençait l'expérience en suspendant le profil de métal par son point B, le prolongement du fil de suspension passerait par exemple en BB'. Le centre de gravité est à l'intersection de AA' et BB'.

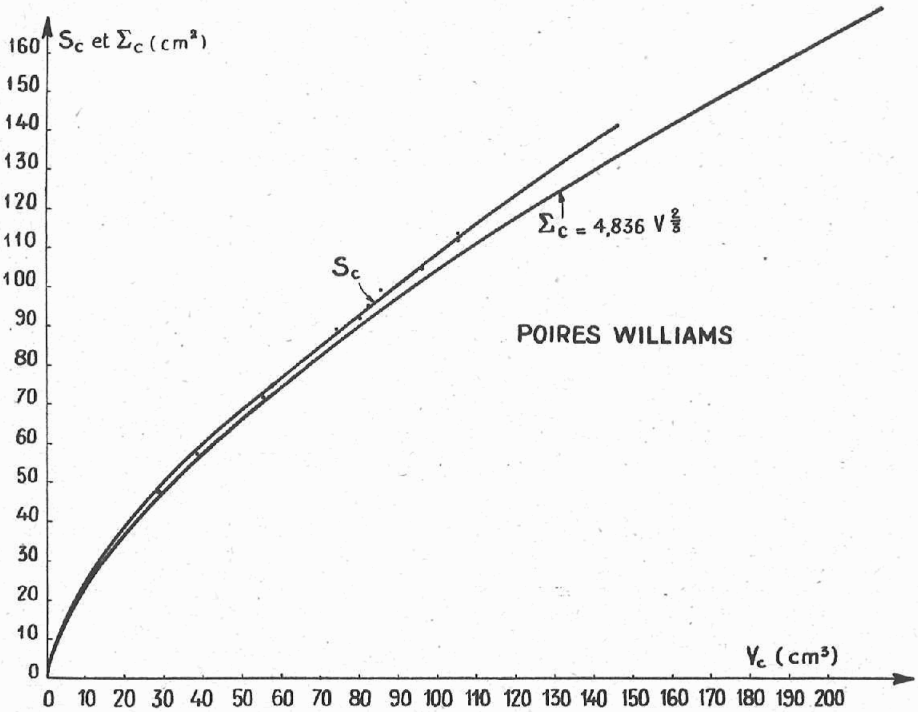

FIG. 4.

rayons, non compté le o commençant la liste est impair ;

d) faire la somme des produits $k\,r$ ainsi obtenus.

La surface est donnée par la formule :

$$(5) \qquad S = \frac{2\pi e \Sigma k r}{3}$$

dans le cas exceptionnel où l'on a exactement divisé la demi-méridienne PO en un nombre entier d'arcs sous-tendus par la corde *e*.

Si le dernier côté du polygone inscrit a une longueur $e' < e$, mener le calcul comme précédemment jusqu'au rayon non nul r_m et corriger la surface S_m ainsi trouvée de la quantité $\pi e' r_m$.

La surface du solide engendré par la demi-méridienne est finalement :

$$(6) \qquad S = \frac{2\pi e \Sigma k r}{3} + \pi e' r_m$$

On appelle S_c la moyenne arithmétique des surfaces obtenues pour les deux demi-méridiennes.

Une méthode fondée sur le même principe permet d'obtenir pour un fruit un volume calculé V_c.

Pour avoir le volume calculé correspondant à une moitié de la coupe on prend sur PO les deux points R'_0 et L' tels que la demi-coupe soit juste comprise entre les perpendiculaires en ces deux points à PO (fig. 2). On partage $R'_0 L'$ en plusieurs segments $R'_0 R'_1 = R'_1 R'_2 = \ldots R'_{m-1} R'_m = e$ et en un segment $R'_m L' = e' < e$. Le plan perpendiculaire à PO en un point R' coupe le volume engendré par la demi-méridienne selon un cercle de surface $s = \pi r^2$ ou une couronne de surface $s = \pi (r^2 - \rho^2)$. Le volume engendré par la demi-coupe est finalement :

$$(7) \qquad V = \frac{e \Sigma k s}{3} + \frac{e' s_m}{2}$$

avec les mêmes listes de coefficients *k* que pour la surface. On appelle V_c la moyenne arithmétique des volumes obtenus pour les deux demi-coupes.

Deuxième méthode.

La surface calculée S_c et le volume calculé V_c peuvent être remplacés par une surface S_g et un volume V_g obtenus par application géométrique des théorèmes de Guldin. Pour chaque moitié de la coupe, on réalise un fil métallique de densité linéaire constante, reproduisant la demi-méridienne de P en O, et un carton de densité superficielle constante reproduisant la surface comprise entre PO et la demi-méridienne. On détermine le centre de gravité G_λ du fil métallique et le centre de gravité G_ω du carton, en suspendant chacune de ces figures successivement par deux de leurs points A et B ; le centre de gravité est chaque fois à la verticale du point de suspension ; il est donné par l'intersection des deux droites AA′ et BB′ (fig. 3). λ étant la longueur du fil PO, ω la surface du carton (obtenue avec le planimètre ou par pesée), r_λ et r_ω les distances respectives de G_λ et G_ω à PO, la figure engendrée par la demi-coupe a pour surface :

$$(8) \qquad S = 2\pi\lambda r_\lambda$$

et pour volume :

$$(9) \qquad V = 2\pi\omega r_\omega$$

La méthode est appliquée successivement à deux demi-méridiennes et on fait la moyenne des valeurs obtenues, soient S_g, moyenne des surfaces et V_g, moyenne des volumes.

Troisième méthode.

La surface et le volume d'une sphère sont liés par la relation $S = 4{,}836\ V^{2/3}$. Les tableaux I et II et la figure 4 montrent des écarts presque toujours inférieurs à 10 % entre la surface calculée S_c, et la surface $\Sigma_c = 4{,}836\ V_c^{2/3}$ de la sphère ayant pour volume le volume V_c calculé par la première méthode.

Pour quatre fruits du tableau II, on a calculé en outre, les surfaces Σ_1 et Σ_2 des sphères ayant pour volumes les volumes V_1 et V_2 obtenus par la première méthode, et correspondant aux deux demi-méridiennes. On a trouvé 0,014 comme moyenne arithmétique des valeurs absolues des huit différences :

$$\frac{S_1 - \Sigma_1}{S_1} - \frac{S_c - \Sigma_c}{S_c} \quad \text{et} \quad \frac{S_2 - \Sigma_2}{S_2} - \frac{S_c - \Sigma_c}{S_c}.$$

On peut donc admettre que le rapport $\frac{S_c - \Sigma_c}{S_c}$ est du même ordre que le rapport $\frac{S - \Sigma}{S}$.

D'où une méthode de calcul améliorée conduisant à une nouvelle valeur calculée S′, mais nécessitant la connaissance du volume calculé V_c (1^{re} méthode), et du volume mesuré V_0 d'où l'on tire $\Sigma_0 = 4{,}836\ V_0^{2/3}$.

D'une part, on prend comme volume du fruit le volume V_0 obtenu par poussée d'Archimède, d'autre part,

TABLEAU I

FRUITS	VOLUME CALCULÉ V_c	SURFACE CALCULÉE S_c	SURFACE Σ_c DE LA SPHÈRE DE VOLUME V_c	ÉCART % $\frac{100\ (S_c - \Sigma_c)}{S_c}$
Poire Williams (1951)	28 cm^3	47,5 cm^2	44,6 cm^2	6,1 %
	38	56,5	54,7	3,2
	54	72,2	69,1	4,3
	74	89,8	85,2	5,1
	80	92	89,8	2,4
	82	95	91,2	4,0
	86	99,8	94,2	5,6
	96	104	101,4	2,5
	99	110	103,5	5,9
	104	112,2	107,0	4,6
	105	114	107,6	5,6
	145	138	133,5	3,3
Pomme Calville	65 cm^3	80 cm^2	78,2 cm^2	2,2 %
	94	101	100,0	1
	95	105	100,7	4,1
	125	130	120,9	7
	146	138	134,1	2,8
	162	149	143,7	3,6
	188	162	158,7	2,0
	232	192	182,6	4,9
	262	210	198,0	5,7
Pomme Canada blanc	205 cm^3	173 cm^2	168,1 cm^2	2,8 %
	224	188	178,4	5,1
	245	199	189,4	4,8
	257	212	195,5	7,8

TABLEAU II

(Poires Williams 1952).

VOLUMES			SURFACES				
CALCULÉ V_c (cm³)	OBSERVÉ V_0 (cm³)	ÉCART % $\frac{100(V_0 - V_c)}{V_0}$	POUR CHAQUE DEMI MÉRIDIENNE S_1 (cm²)	S_2 (cm²)	MOYENNE S_c (cm²)	SPHÈRE Σ_c (cm²)	ÉCART % $\frac{100(S_c - \Sigma_c)}{S_c}$
4,186	4,4	+ 4,9	13,91	13,89	13,90	12,56	9,6
4,593	4,45	— 3,2	14,61	14,54	14,57	13,36	8,3
4,316	4,55	+ 5,1	14,52	13,37	13,95	12,82	8,1
4,848	4,8	— 1,0	15,54	14,84	15,19	13,85	8,8
5,394	5,1	— 5,8	17,64	16,19	16,92	14,87	12,1
5,535	5,5	— 0,6	16,37	16,52	16,44	15,13	8,0
6,281	5,88	— 6,8	18,60	18,59	18,59	16,46	11,5
24,24	22,38	— 8,3	52,73	29,91	41,32	40,50	2,0
23,25	22,82	— 1,9	43,99	36,48	40,23	39,40	2,1
24,90	23,10	— 7,8	43,48	42,46	42,97	41,24	4,0
35,09	35,50	+ 1,2	59,78	47,05	53,42	51,84	3,0
55,65	51,50	— 8,1	79,93	62,64	71,28	70,49	1,1
59,25	58,17	— 1,8	79,63	75,95	77,79	73,50	5,5
60,82	59,32	— 2,5	78,12	77,63	77,88	74,79	4,0
81,32	75,42	— 7,8	95,44	92,70	94,07	90,77	3,5
108,04	104,72	— 3,2	121,48	110,29	115,88	109,70	5,3

on tire de l'application de la première méthode la quantité : $\frac{100\,(S_c - \Sigma_c)}{S_c}$.

La valeur S′ adoptée pour la surface devra donc vérifier :

$$\frac{S' - \Sigma_0}{S'} = \frac{S_c - \Sigma_c}{S_c} \tag{10}$$

ou encore :

$$\frac{S'}{S_c} = \frac{\Sigma_0}{\Sigma_c} = \left(\frac{V_0}{V_c}\right)^{2/3} \tag{11}$$

d'où la formule :

$$S' = S_c \left(\frac{V_0}{V_c}\right)^{2/3} = \tag{12}$$

$$= \frac{S_c\,(5\,V_0 + V_c)}{(V_0 + 5\,V_c)} + \frac{5\,S_c}{162}\left(\frac{V_0 - V_c}{V_0}\right)^3 \ldots$$

(Si l'on utilise le développement en série de S′, on se borne évidemment au premier terme).

On trouve ainsi les éléments de la figure 5 que nous donnons ici parce qu'elle peut être directement utilisable dans des études sur les poires Williams.

La surface S′ ainsi calculée est indépendante d'une dilatation du papier photographique s'effectuant également dans toutes les directions, et pratiquement indépendante d'une dilatation qui serait plus considérable dans une certaine direction.

Si l'on a employé la deuxième méthode, il suffit, pour en utiliser les résultats, de remplacer S_c et V_c par S_g et V_g dans la formule (12).

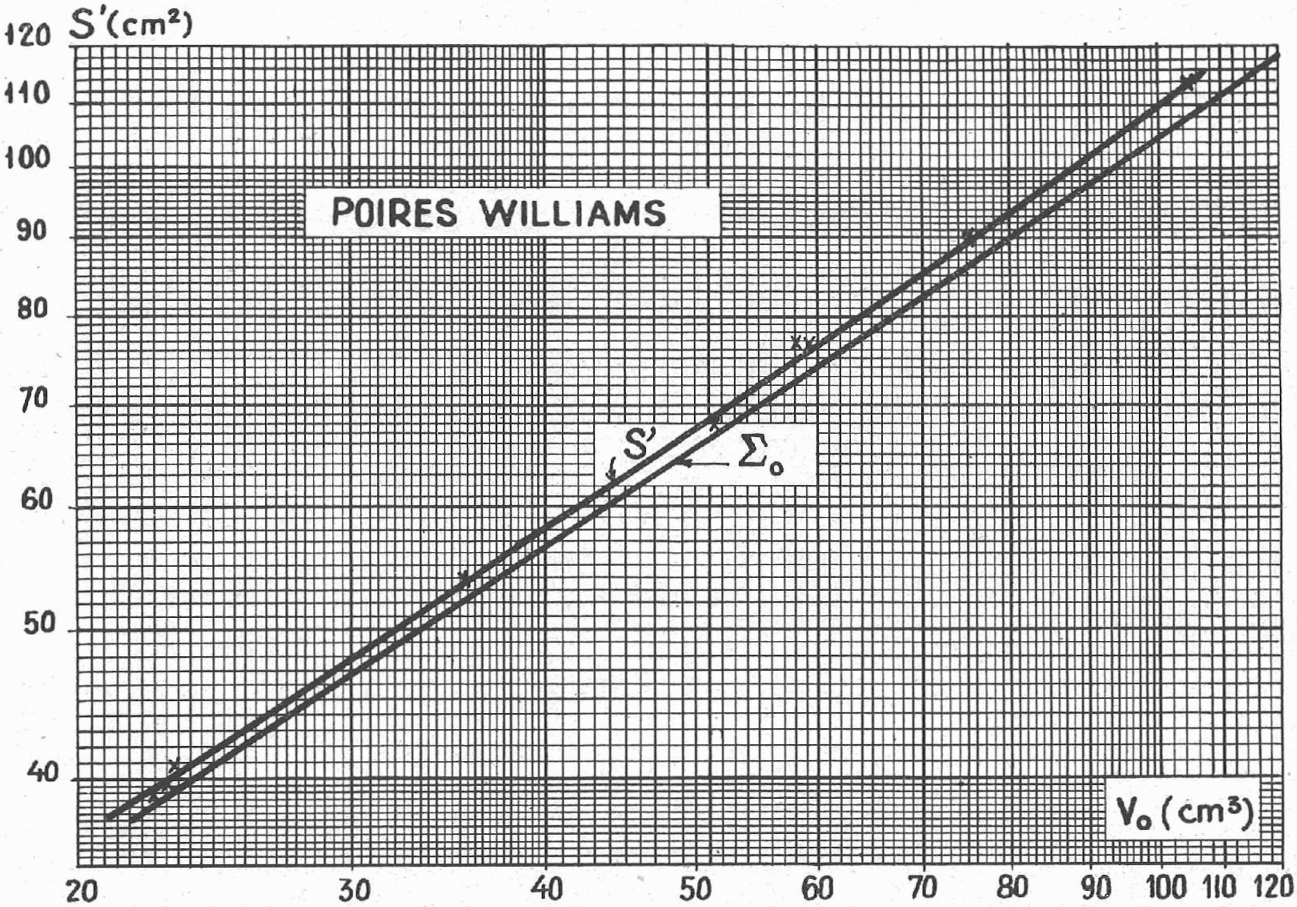

FIG. 5. — Valeurs des surfaces calculées S' et Σ_0 (3e méthode) en fonction du volume mesuré V_0 de poires Williams. Pour les valeurs de V_0 comprises entre 20 et 40 cm³, l'échelle choisie pour V_0 correspond à des intervalles de 0,4 cc.

(*Station expérimentale du Froid de Bellevue*)

AVIS AUX IMPORTATEURS D'AGRUMES DE TOUTES PROVENANCES

Les importateurs d'agrumes de toutes provenances devront se conformer aux dispositions ci-après :

1) *Règles générales de qualité.*

Les agrumes doivent être mûrs, c'est-à-dire présenter l'aspect extérieur et la coloration caractéristiques de la variété ainsi qu'un pourcentage de jus au moins égal à 25 %, par rapport au poids des fruits.

2) *Règles particulières aux oranges.*

a) *Maturité.*

Le jus doit présenter un rapport entre l'extrait sec soluble total et l'acidité (exprimée en acide citrique) au moins égal à 6,5. Ce jus doit, en outre, correspondre à un degré Brix au moins égal à 9,5.

b) *Calibrage.*

Le calibrage minimum (diamètre équatorial) doit être au moins égal à 50 mm.

Extrait du Journal Officiel, 8 *janvier* 1953, *page* 323.
Ministère des Finances et des Affaires économiques et Ministère de l'Agriculture.