

Notes sur la démographie bovine au Sahel

II. Représentation et projection théoriques du troupeau par un modèle mathématique après une catastrophe

par G. TACHER (*)

RESUME

L'auteur, utilisant un modèle mathématique matriciel étudié dans un travail antérieur, propose à partir de toutes les racines de l'équation caractéristique de la matrice de représenter la composition du troupeau femelle bovin soumis à une catastrophe par une combinaison de vecteurs propres associés permettant de suivre dans le temps les évolutions de la population totale et des différentes classes d'âge.

Il illustre le modèle théorique par une application pratique dont les chiffres sont tirés de la récente sécheresse ayant dévasté les troupeaux sahéliens.

Dans une précédente publication (5), nous avons proposé de représenter le troupeau bovin sahélien par un modèle mathématique matriciel, en posant comme hypothèse de base la stabilité dans le temps des coefficients démographiques (fécondité, mortalités, ventes et achats, réformes par classes d'âge) et nous nous étions attachés à décrire le troupeau après convergence de celui-ci vers un état stable. Pour ce faire, nous n'avions pris en compte que la valeur propre de module maximal λ et nous avons étudié l'importance des autres valeurs propres en considérant que celles-ci avaient un module suffisamment petit par rapport à l'unité ou que le temps écoulé à partir de l'instant initial était suffisamment grand.

Le modèle, qui est décrit dans les lignes suivantes, élargit celui proposé antérieurement. En effet, lorsqu'une catastrophe s'abat sur un troupeau (le terme troupeau étant pris dans le sens d'ensemble de troupeaux agrégé à un échelon régional homogène), si toutes les classes d'âge étaient touchées de façon uniforme les populations avant et après catastrophe évolueraient de la même manière. Or, il n'en est rien et le retour d'une part à la population globale antérieure et d'autre part à l'état stable s'effectue après de nombreuses fluctuations, fluctuations dépendant de la mortalité variable suivant les classes d'âge et des caractéristiques démographiques. En effet, peu de temps après la catastrophe, le temps t ne peut être considéré comme très grand et la puissance t ième des racines autres que la racine de module maximal de l'équation caractéristique de la matrice ne sont pas négligeables et doivent être prises en compte. Elles expliquent les fluctuations de l'effectif. Au fur et à mesure que t augmente, la valeur propre de module

(*) I.E.M.V.T., Laboratoire de Recherches Vétérinaires et Zootechniques de Farcha, B.P. 433, N'Djaména, République du Tchad.

Adresse actuelle: Centre International pour l'Elevage en Afrique. B.P. 5689. Addis Abeba, Ethiopie.

maximal prend la plus grande importance alors que les autres valeurs propres de module en général inférieur à l'unité prennent une importance de plus en plus faible. Ces deux phénomènes juxtaposés expliquent l'amortissement dans le temps des fluctuations avant la convergence vers l'état stable.

1. LE MODELE MATHEMATIQUE

Comme tous les modèles, celui-ci ne sera valable que pour autant qu'hypothèses et données seront un reflet de la réalité. Seul un technicien de l'élevage sera capable de juger de la validité des hypothèses et données et des résultats obtenus.

Les hypothèses que nous retiendrons et qui peuvent être criticables, sont les suivantes :

- Le troupeau était dans un état stable avant la catastrophe. Il aurait donc une croissance exponentielle uniforme pour la population totale et par classes d'âge. Cette hypothèse nous permettra de comparer les deux types d'évolution du troupeau.
- La catastrophe n'a apporté aucune contrainte nouvelle sur l'élevage. Ainsi les taux de fécondité et de mortalité par classe d'âge seront après la catastrophe ce qu'ils étaient avant. De même, les taux de vente et d'achat resteront identiques. Cette hypothèse peut paraître très forte. En effet, on observe actuellement, un an après la sécheresse de 1973, une paupérisation aiguë des éleveurs obligeant bien souvent ceux-ci à vendre des animaux que normalement ils auraient gardés; ce fait ne peut d'ailleurs qu'accentuer les délais de retour à l'équilibre du troupeau. De toute façon, ce modèle pouvant être programmé sur ordinateur, diverses hypothèses peuvent être introduites quant aux variations possibles des coefficients de la matrice.
- Seul le troupeau femelle sera étudié, la composition du troupeau complet s'en déduisant aisément.
- Comme dans le travail précédent, aucune contrainte n'est introduite concernant les potentialités alimentaires.

1.1. Rappel sur le modèle mathématique précédemment décrit

Le troupeau est représenté par l'équation matricielle suivante :

• $n_{x,t}$ représente le nombre de femelles vivantes dans la classe d'âge x à $x + 1$ l'année t (on a donc $n_{k+1,t} = 0$).

• F_x représente le nombre de génisses nées dans l'intervalle de temps t à $t + 1$ par femelle de la classe d'âge x à $x + 1$ vivante à l'instant t et qui seront retrouvées vivantes dans la classe d'âge 0 à 1 an à l'instant $t + 1$.

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k-2} & F_{k-1} & F_k \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{0,0} \\ n_{1,0} \\ n_{2,0} \\ n_{3,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_{k-1,0} \\ n_{k,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{0,1} \\ n_{1,1} \\ n_{2,1} \\ n_{3,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_{k-1,1} \\ n_{k,1} \end{bmatrix}$$

ou :
$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \end{bmatrix}$$

• P_x représente la probabilité qu'une femelle de la classe d'âge x à $x + 1$ à l'instant t se retrouve vivante à l'instant $t + 1$ dans la classe d'âge $x + 1$ à $x + 2$.

L'équation caractéristique de la matrice $[M]$ est :

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} - F_0 \lambda^k - P_0 F_1 \lambda^{k-1} - P_0 P_1 F_2 \lambda^{k-2} - \dots - \\ - P_0 P_1 P_2 \dots P_{k-2} F_{k-1} \lambda - P_0 P_1 P_2 \dots P_{k-1} F_k = 0 \end{aligned}$$

1.2. Représentation du troupeau à l'instant t

Tous les coefficients de l'équation caractéristique sont négatifs, excepté celui affectant le terme en λ^{k+1} . Il vient que sur les $k + 1$ racines de cette équation, une seule racine est positive, les autres racines étant complexes (conjuguées deux à deux) ou négatives (nombre pair ou impair suivant la parité de λ^{k+1}).

Pour chaque valeur des λ_i , les équations suivantes annulant le déterminant de la matrice $[M]$ sont vérifiées :

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{c} M - \lambda_i \cdot I \\ M - \lambda_i \cdot I \end{array} \right| \begin{array}{l} V_i = 0 \\ v_i = 0 \end{array} \end{array}$$

en appelant V_i et v_i respectivement les vecteurs propres à droite et à gauche correspondant à la valeur propre λ_i .

Le vecteur colonne V_i peut être calculé de la manière suivante en partant du bas :

$$\begin{aligned} n_k &= 1\ 000 \\ n_{k-1} &= \lambda_i \cdot n_k / P_{k-1} \\ n_{k-2} &= \lambda_i \cdot n_{k-1} / P_{k-2} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ n_1 &= \lambda_i \cdot n_2 / P_1 \\ n_0 &= \lambda_i \cdot n_1 / P_0 \end{aligned} \quad (I)$$

Le vecteur ligne v_i peut être calculé de la manière suivante en partant de la gauche :

$$\begin{aligned} n_0 &= 1\ 000; \quad n_1 = n_0 \cdot (F_0 - \lambda_i) / P_0; \\ n_2 &= (\lambda_i \cdot n_1 - n_0 \cdot F_1) / P_1; \dots \dots \dots ; \\ n_{k-1} &= (\lambda_i \cdot n_{k-2} - n_0 \cdot F_{k-2}) / P_{k-2}; \\ n_k &= (\lambda_i \cdot n_{k-1} - n_0 \cdot F_{k-1}) / P_{k-1}. \end{aligned} \quad (II)$$

Normalisons chaque vecteur propre v_i et V_i correspondant à chaque valeur propre λ_i , on obtient en appelant le produit vectoriel $v_i \cdot V_i = z^2$:

$$\frac{v_i}{z} \cdot \frac{V_i}{z} = 1$$

Puisque nous avons $k + 1$ valeurs propres de λ distinctes, nous aurons $k + 1$ vecteurs propres indépendants, on a donc dans l'espace vectoriel à $k + 1$ dimensions la relation :

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot V_i = \emptyset \rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

Puisque nos vecteurs propres v_i et V_i ont été normalisés, ils forment une base orthonommée et l'on a les relations :

$$\begin{aligned} v_j \cdot V_i &= 0 & \forall i \neq j \\ v_i \cdot V_i &= 1 & \forall i \end{aligned}$$

En appelant [P] la matrice des V_i vecteurs propres colonnes ordonnés de gauche à droite suivant les valeurs décroissantes des modules des λ_i correspondantes et en appelant $[P]^{-1}$ la matrice des v_i vecteurs propres lignes ordonnés de haut en bas suivant les valeurs décroissantes des modules des λ_i correspondantes, on a alors la relation :

$$[P]^{-1} \cdot [P] = [I]$$

[I] étant la matrice unité d'ordre $k + 1$.

Puisque les $k + 1$ vecteurs V_i sont indépendants, un vecteur $[N_0]$ ($[N_0] \neq \emptyset$) peut s'exprimer comme étant une combinaison linéaire de ces $k + 1$ vecteurs V_i , on a donc :

$$N_0 = \alpha_1 \cdot V_1 + \alpha_2 \cdot V_2 + \dots + \alpha_{k+1} \cdot V_{k+1}$$

En appelant $[\alpha]$ le vecteur colonne des $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$, on a la relation :

$$[N_0] = [P] \cdot [\alpha] \quad (\text{III})$$

et

$$[\alpha] = [P]^{-1} \cdot [N_0] \quad (\text{IV})$$

En appelant $[\Lambda]$ la matrice diagonale des λ_i classés par ordre décroissant des valeurs de leurs modules depuis le haut à gauche jusqu'en bas à droite, on a [cf. (1) pp. 106 à 108] :

$$[M] = [P] \cdot [\Lambda] \cdot [P]^{-1}$$

La relation fondamentale du modèle mathématique décrit antérieurement :

$$[M]^t \cdot [N_0] = [N_t]$$

peut s'écrire :

$$\left[[P] \cdot [\Lambda] \cdot [P]^{-1} \right]^t \cdot [N_0] = [N_t]$$

ou

$$[P] \cdot [\Lambda]^t \cdot [P]^{-1} \cdot [N_0] = [N_t]$$

ou en tenant compte de la valeur de $[N_0]$ trouvée précédemment (III) :

$$[P] \cdot [\Lambda]^t \cdot [P]^{-1} \cdot [P] \cdot [\alpha] = [N_t]$$

et

$$[P] \cdot [\Lambda]^t \cdot [\alpha] = [N_t] \quad (\text{V})$$

Connaissant les $k + 1$ valeurs des λ_i , on a donc $[\Lambda]^t$ et connaissant $[N_0]$, c'est-à-dire la composition du troupeau tout de suite après la catastrophe, il est aisé de calculer $[P]$, $[P]^{-1}$, $[\alpha]$ et d'en déduire $[N_t]$, c'est-à-dire la composition du troupeau par classes d'âge et en sommant pour chaque t la population globale du troupeau.

2. DISCUSSION DU MODELE ET APPLICATION

2.1. Calcul de $[\Lambda]$, $[P]$ et $[P]^{-1}$ sur un troupeau nigérien

Nous reprendrons un exemple déjà donné (5) d'un troupeau ayant les caractéristiques démographiques suivantes :

- Taux de fécondité de 0,60 uniforme par classes d'âge, les femelles mettant bas dans la classe d'âge 4 à 5 ans; le taux de féminité est de 0,5.
- Taux de mortalité de 30 p. 100 dans la classe d'âge 0 à 1 an, 10 p. 100 dans la classe d'âge 1 à 2 ans, 5 p. 100 dans la classe d'âge 2 à 3 ans, 2 p. 100 dans la classe d'âge 3 à 4 ans et dans les classes d'âge suivantes.
- Aucune femelle n'est réformée ou vendue avant l'âge de 11 ans (hypothèse simplificatrice), âge auquel toutes les femelles sont réformées.

Les coefficients de la matrice sont alors les suivants :

$$P_0 = 0,80; P_1 = 0,925; P_2 = 0,965; P_3 \text{ à } P_9 = 0,98.$$

$$F_0 \text{ à } F_2 = 0; F_3 = 0,125; F_4 \text{ à } F_9 = 0,252; F_{10} = 0,127.$$

et l'équation caractéristique de la matrice est :

$$\lambda^{11} - 0,089226 \lambda^7 - 0,176669 \lambda^6 - 0,173135 \lambda^5 - 0,169672 \lambda^4 - \\ - 0,166278 \lambda^3 - 0,162952 \lambda^2 - 0,159692 \lambda - 0,079040 = 0.$$

Les racines de cette équation caractéristique ont été calculées par la méthode de BAIRSTOW modifiées par HITCHCOCK [(4) p. 95 à 101]. Elles sont les suivantes (*):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1,022 \\ \lambda_{2,3} &= 0,857 e^{\pm i 41,961} \\ \lambda_{4,5} &= 0,835 e^{\pm i 71,932} \\ \lambda_{6,7} &= 0,763 e^{\pm i 104,720} \\ \lambda_{8,9} &= 0,737 e^{\pm i 137,463} \\ \lambda_{10,11} &= 0,691 e^{\pm i 168,133} \end{aligned}$$

Les chiffres sont donnés ici avec 3 décimales, pour ne pas alourdir l'écriture, mais les calculs ont été effectués avec 6 décimales (précision utile si l'on veut obtenir la matrice inverse avec une bonne approximation, mais précision évidemment tout à fait superflue et illusoire si l'on se réfère à la composition du troupeau). Les angles des racines complexes sont donnés en degrés et en millièmes de degré.

A titre d'illustration, nous donnerons pour les racines $\lambda_{2,3}$ la méthodologie nous ayant permis de trouver les vecteurs colonnes $V_{2,3}$ et les vecteurs lignes $v_{2,3}$, on extrapolera ainsi facilement aux matrices [P] et [P]⁻¹.

En appliquant les formules (I) et (II) pour la valeur de λ_2 , on obtient :

Vecteur ligne v_2		Classe d'âge	Vecteur colonne V_2	
Module (ρ)	Angle (θ)		Module (ρ)	Angle (θ)
1000	0	n_0	346,636	419,607
1071,844	41,961	n_1	323,401	377,646
993,599	83,921	n_2	348,869	335,686
882,887	125,882	n_3	392,616	293,725
897,546	169,557	n_4	448,717	251,764
1013,913	— 156,115	n_5	512,834	209,803
1020,008	— 127,477	n_6	586,113	167,843
909,360	— 101,920	n_7	669,863	125,882
703,015	— 78,454	n_8	765,580	83,821
435,841	— 57,073	n_9	874,974	41,961
148,688	— 41,964	n_{10}	1000	0

(*) Nous adressons nos vifs remerciements à Monsieur Quyen Van Phu, assistant de mathématiques à l'Université du Tchad qui a bien voulu faire le petit programme qui a permis de calculer ces racines.

Le produit vectoriel $v_2 \cdot V_2 = z^2$ est égal à 4.056.769,044 $e^{187,247}$ (la multiplication a été effectuée en coordonnées trigonométriques et l'addition en repassant par les coordonnées polaires).

La norme est $\sqrt{z^2} = 2014,142 e^{18,623}$ par laquelle nous divisons chaque composante des vecteurs v_2 et V_2 pour obtenir les vecteurs normés suivants (l'ensemble de ces vecteurs forme une base orthonommée) :

Vecteur ligne v_2 normé		Classe d'âge	Vecteur colonne V_2 normé	
Module (ρ)	Angle (θ)		Module (ρ)	Angle (θ)
0,496	— 18,623	n_0	0,172	400,983
0,523	23,337	n_1	0,161	359,023
0,493	65,298	n_2	0,173	317,062
0,438	107,259	n_3	0,195	275,101
0,446	150,934	n_4	0,223	233,141
0,503	— 174,738	n_5	0,255	191,180
0,506	— 146,100	n_6	0,291	149,219
0,451	— 120,544	n_7	0,333	107,259
0,349	— 97,077	n_8	0,380	65,298
0,216	— 75,696	n_9	0,434	23,337
0,074	— 60,587	n_{10}	0,496	— 18,623

On vérifie bien que le produit $v_2 \cdot V_2 = 1$.

Les vecteurs v_3 et V_3 sont les conjugués des vecteurs v_2 et V_2 . En effet, λ_3 est conjuguée de λ_2 (l'angle θ vaut $-41,961$ au lieu de $+41,961$) et il est clair que, par les formules (I) et (II), chaque composante vectorielle de v_3 et V_3 sera conjuguée des mêmes composantes vectorielles de v_2 et V_2 ; il en sera donc de même pour les vecteurs v_3 et V_3 normés.

Une série de calculs identiques nous donne les vecteurs lignes v_1 normés qui forment la matrice $[P]^{-1}$ et les vecteurs V_1 normés qui forment la matrice $[P]$. Ces deux matrices sont écrites en annexe.

2.2. Exemple de vecteur $[N_0]$ sur la catastrophe du Kanem (Tchad)

Le vecteur colonne $[N_0]$, qui est la composition du troupeau par classes d'âge à l'instant 0 c'est-à-dire tout de suite après que la catastrophe se soit abattue sur le troupeau, a été estimée par nous-même au cours d'une tournée effectuée en novembre 1973 dans la région du Kanem (Mao) au Tchad, région très durement touchée par la sécheresse.

Ce vecteur $[N_0]$, qui sera ici donné, n'est qu'indicatif et ne saurait être un reflet de ce qui s'est passé dans le Kanem et a fortiori dans le Sahel. En effet, étant seul et disposant de peu de temps, nous n'avons pu compter que 638 animaux en 7 puits différents. De plus, le recensement devant englober tous les animaux, la période utile de travail n'était que d'environ deux heures par jour (période froide avec un seul abreuvement par jour, le matin, des troupeaux; peu d'animaux à abreuver). Nous avons choisi une région relativement touchée (50 p. 100 de mortalité ?) de manière à avoir suffisamment d'animaux à dénombrer. La structure trouvée ne saurait donc être généralisée à des régions d'élevage différentes ou à des zones plus ou moins touchées que celle-ci.

Avec ces réserves nous donnons donc la structure du troupeau trouvée dans le tableau suivant :

Exemple de structure de troupeau après une catastrophe

Classe d'âge	En nombre			En p. 1 000			Femelles ramenées à 1 000
	Femelles	Mâles	Castrés	Femelles	Mâles	Castrés	
n_0	23	15	0	36,0	23,5	0	48,7
n_1	56	13	0	87,7	20,3	0	118,6
n_2	108	52	0	169,2	81,5	0	228,8
n_3	120	41	0	188,0	64,2	0	254,2
n_4	57	18	6	83,3	28,2	9,5	120,7
n_5	44	8	6	68,9	12,5	9,5	93,2
n_6	19	5	1	29,7	7,8	1,5	40,2
n_7	28	1	0	43,8	1,5	0	59,3
n_8	5	0	0	7,8	0	0	10,6
n_9	8	0	0	12,5	0	0	16,9
n_{10}	4	0	0	6,2	0	0	8,4
	472	153	13	739,8	239,8	20,3	1000
	638			1 000			

Le vecteur colonne $[N_0]$ retenu a été le suivant :

$$\begin{aligned} n_{0,0} &= 48; n_{1,0} = 119; n_{2,0} = 229; n_{3,0} = 255; \\ n_{4,0} &= 121; n_{5,0} = 93; n_{6,0} = 41; n_{7,0} = 60; \\ n_{8,0} &= 11; n_{9,0} = 17; n_{10,0} = 6. \end{aligned}$$

2.3. Calcul du vecteur $[\alpha]$

En supposant que le même type de catastrophe soit survenu sur le troupeau dont les caractéristiques démographiques ont été données ci-dessus et en appliquant la formule (IV), il nous est maintenant possible de calculer le vecteur colonne $[\alpha]$. Par exemple la valeur de α_2 sera égale au produit du vecteur ligne normé v_2 (en annexe : deuxième ligne de la matrice $[P]^{-1}$) par le vecteur colonne $[N_0]$. Il est clair que v_2 et v_3 ayant leurs composantes respectives conjuguées, α_2 et α_3 seront eux-mêmes conjugués.

La valeur du vecteur colonne $[\alpha]$ est la suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 338,331 \\ \alpha_{2,3} &= 208,158 e^{\pm i 98,097} \\ \alpha_{4,5} &= 162,132 e^{\pm i 174,001} \\ \alpha_{6,7} &= 85,438 e^{\pm i 121,344} \\ \alpha_{8,9} &= 24,880 e^{\pm i 97,862} \\ \alpha_{10,11} &= 66,553 e^{\pm i 130,934} \end{aligned}$$

Notons que \pm signifie que la valeur de l'angle pour le premier indice nommé de α est positive alors que \mp signifie que la valeur de l'angle pour le premier indice nommé de α est négative.

2.4. Evolution du troupeau en fonction du temps écoulé après la catastrophe

2.4.1. Evolution du troupeau par classe d'âge

En appliquant la formule (V), il nous est maintenant possible de connaître la composition du troupeau quel que soit t ($t \geq 0$).

Nous appellerons ρ_{α_1} , $\rho_{v_{x,1}}$, ρ_{λ_1} respectivement les modules de la première composante du vecteur colonne α , de la composante de la ligne x et de la colonne 1 de la matrice [P], de la valeur propre λ_1 , et α_1 , $v_{x,1}$, λ_1 les valeurs algébriques des angles des mêmes composantes. On a alors :

$$\begin{aligned} n_{x,t} = & \rho_{\alpha_1} \cdot e^{i\alpha_1} \cdot \rho_{v_{x,1}} \cdot e^{iv_{x,1}} \cdot \rho_{\lambda_1}^t \cdot e^{i\lambda_1 \cdot t} + \\ & + \rho_{\alpha_2} \cdot e^{i\alpha_2} \cdot \rho_{v_{x,2}} \cdot e^{iv_{x,2}} \cdot \rho_{\lambda_2}^t \cdot e^{i\lambda_2 \cdot t} + \\ & + \rho_{\alpha_3} \cdot e^{i\alpha_3} \cdot \rho_{v_{x,3}} \cdot e^{iv_{x,3}} \cdot \rho_{\lambda_3}^t \cdot e^{i\lambda_3 \cdot t} + \\ & + \dots\dots\dots + \\ & + \rho_{\alpha_{10}} \cdot e^{i\alpha_{10}} \cdot \rho_{v_{x,10}} \cdot e^{iv_{x,10}} \cdot \rho_{\lambda_{10}}^t \cdot e^{i\lambda_{10} \cdot t} + \\ & + \rho_{\alpha_{11}} \cdot e^{i\alpha_{11}} \cdot \rho_{v_{x,11}} \cdot e^{iv_{x,11}} \cdot \rho_{\lambda_{11}}^t \cdot e^{i\lambda_{11} \cdot t} \end{aligned}$$

En remarquant que :

- la première composante, correspondant à la racine réelle, n'a que des parties réelles;
- les autres composantes 2 et 3, 4 et 5 ..., 10 et 11 sont conjuguées deux à deux donc que les modules sont identiques mais les angles opposés, il vient :

$$\begin{aligned} n_{x,t} = & \rho_{\alpha_1} \cdot \rho_{v_{x,1}} \cdot \rho_{\lambda_1}^t + \\ & + \rho_{\alpha_2} \cdot \rho_{v_{x,2}} \cdot \rho_{\lambda_2}^t \cdot (e^{i(\alpha_2 + v_{x,2} + \lambda_2 \cdot t)} + e^{-i(\alpha_2 + v_{x,2} + \lambda_2 \cdot t)}) + \\ & + \dots\dots\dots + \\ & + \rho_{\alpha_{10}} \cdot \rho_{v_{x,10}} \cdot \rho_{\lambda_{10}}^t \cdot (e^{i(\alpha_{10} + v_{x,10} + \lambda_{10} \cdot t)} + e^{-i(\alpha_{10} + v_{x,10} + \lambda_{10} \cdot t)}) \end{aligned}$$

Formule se simplifiant encore en appliquant la formule :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos \theta - i \sin \theta) = 2 \cos \theta$$

en :

$$\begin{aligned}
n_{x,t} = & \rho_{\alpha_1} \cdot \rho_{v_{x,1}} \cdot \rho^t_{\lambda_1} + \\
& + 2 \rho_{\alpha_2} \cdot \rho_{v_{x,2}} \cdot \rho^t_{\lambda_2} \cdot \cos(\alpha_1 + v_{x,1} + \lambda_1 \cdot t) + \\
& + 2 \rho_{\alpha_4} \cdot \rho_{v_{x,4}} \cdot \rho^t_{\lambda_4} \cdot \cos(\alpha_4 + v_{x,4} + \lambda_4 \cdot t) + \\
& + 2 \rho_{\alpha_6} \cdot \rho_{v_{x,6}} \cdot \rho^t_{\lambda_6} \cdot \cos(\alpha_6 + v_{x,6} + \lambda_6 \cdot t) + \\
& + 2 \rho_{\alpha_8} \cdot \rho_{v_{x,8}} \cdot \rho^t_{\lambda_8} \cdot \cos(\alpha_8 + v_{x,8} + \lambda_8 \cdot t) + \\
& + 2 \rho_{\alpha_{10}} \cdot \rho_{v_{x,10}} \cdot \rho^t_{\lambda_{10}} \cdot \cos(\alpha_{10} + v_{x,10} + \lambda_{10} \cdot t)
\end{aligned}$$

A titre d'exemple, calculons $n_{2,4}$ [formule (V)], chaque terme de la troisième ligne de la matrice [P] ($n_{2,4}$ est la troisième classe d'âge, la quatrième année après la catastrophe) doit être multiplié successivement par le λ_1^t et par le α_1 correspondant.

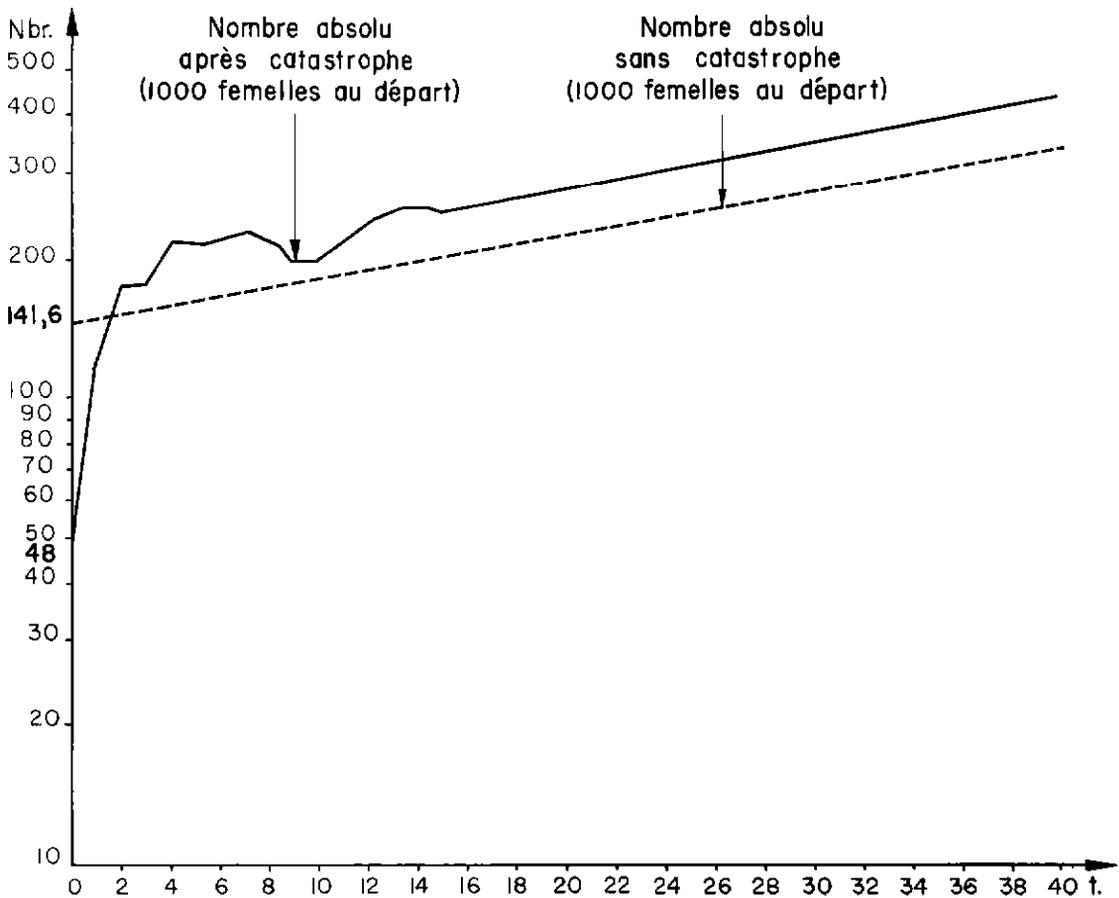
Il vient (les termes provenant de la matrice [P] sont en italique) :

$$\begin{aligned}
n_{2,4} = & 338,331 \cdot 0,371 \cdot (1,022)^4 + \\
& + 2.208,158 \cdot 0,173 \cdot (0,857)^4 \cdot \cos [98,097 + 317,062 + (41.961.4)] + \\
& + 2.162,132 \cdot 0,179 \cdot (0,835)^4 \cdot \cos [174,091 + 576,418 + (71,932.4)] + \\
& + 2.85,438 \cdot 0,118 \cdot (0,763)^4 \cdot \cos [-121,344 + 855,535 + (104,712.4)] + \\
& + 2.24,880 \cdot 0,113 \cdot (0,737)^4 \cdot \cos [-97,862 + 1137,624 + (137,463.4)] + \\
& + 2.66,553 \cdot 0,086 \cdot (0,691)^4 \cdot \cos [-130,934 + 1399,885 + (166,133.4)]. \\
& n_{2,4} = 130.
\end{aligned}$$

Tous calculs faits, les 11 graphiques suivants montrent par classes d'âge en partant de 1 000 femelles avant et après catastrophe, l'évolution du nombre d'animaux de chaque classe d'âge (en ordonnées, l'échelle est logarithmique; un encart donne la formule de la courbe en fonction du temps).

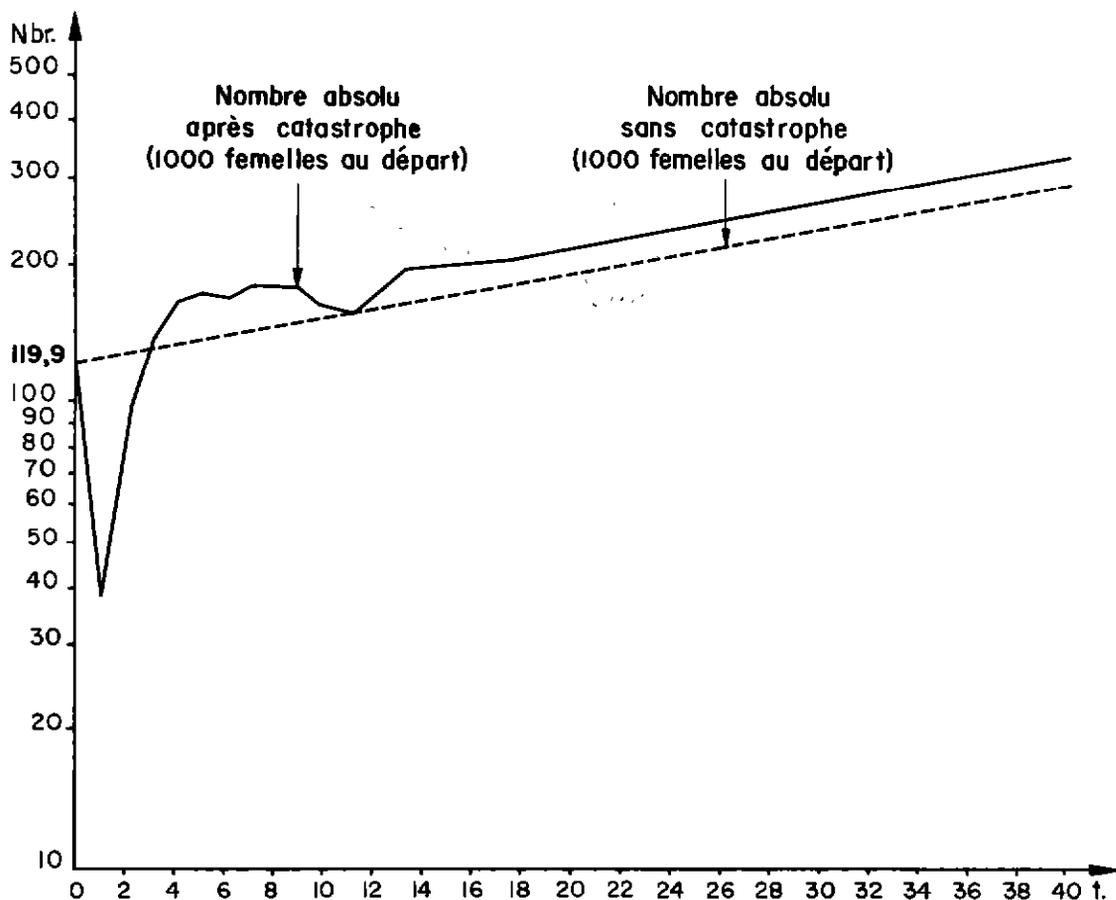
Graphique 1 : $n_{0,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{0,t} = & 177,282 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 71,648 \cdot (0,857)^t \cdot \cos (139,080 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 54,528 \cdot (0,835)^t \cdot \cos (174,372 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 15,851 \cdot (0,763)^t \cdot \cos (223,632 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 4,131 \cdot (0,737)^t \cdot \cos (234,687 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 7,411 \cdot (0,691)^t \cdot \cos (161,217 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



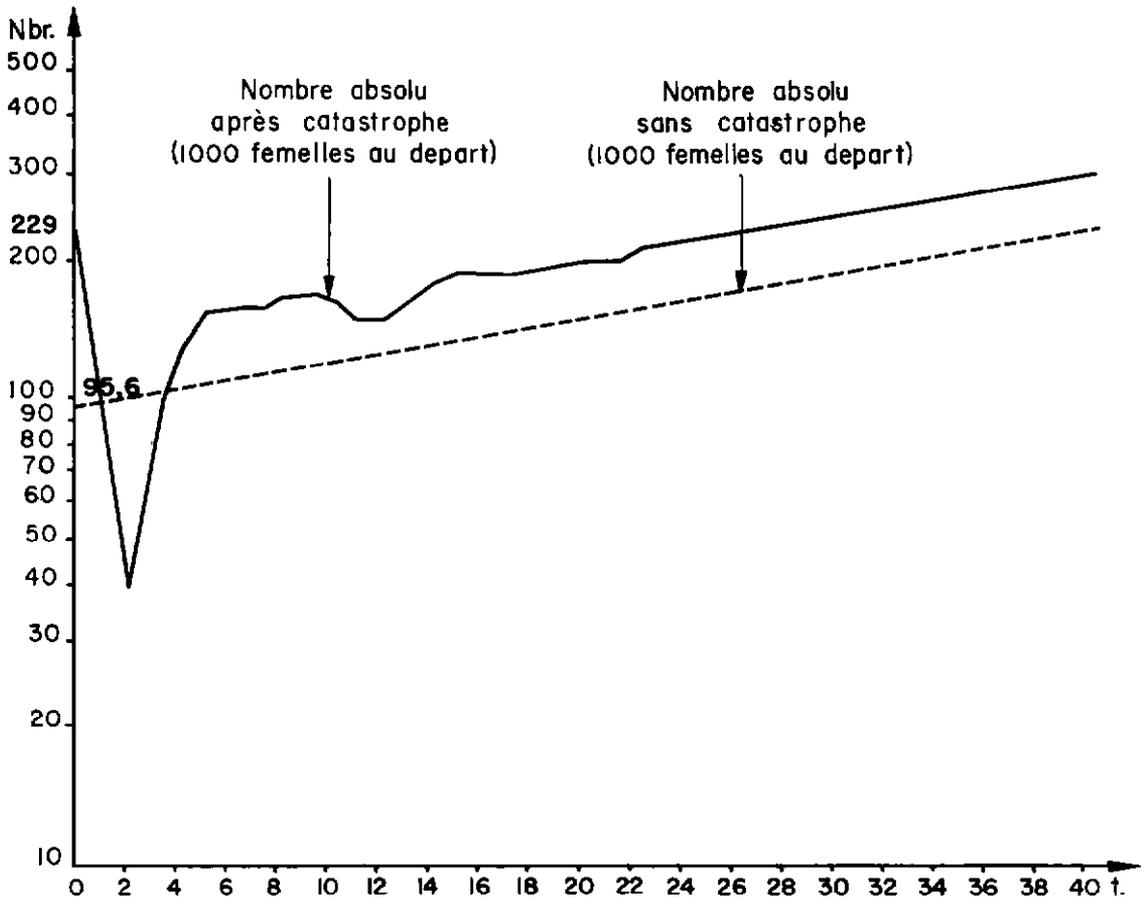
Graphique 2 : $n_{1,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{1,t} = & 138,731 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 66,846 \cdot (0,857)^t \cdot \cos (97,120 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 52,255 \cdot (0,835)^t \cdot \cos (102,440 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 16,623 \cdot (0,763)^t \cdot \cos (118,912 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 4,483 \cdot (0,737)^t \cdot \cos (97,225 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 8,583 \cdot (0,691)^t \cdot \cos (355,084 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



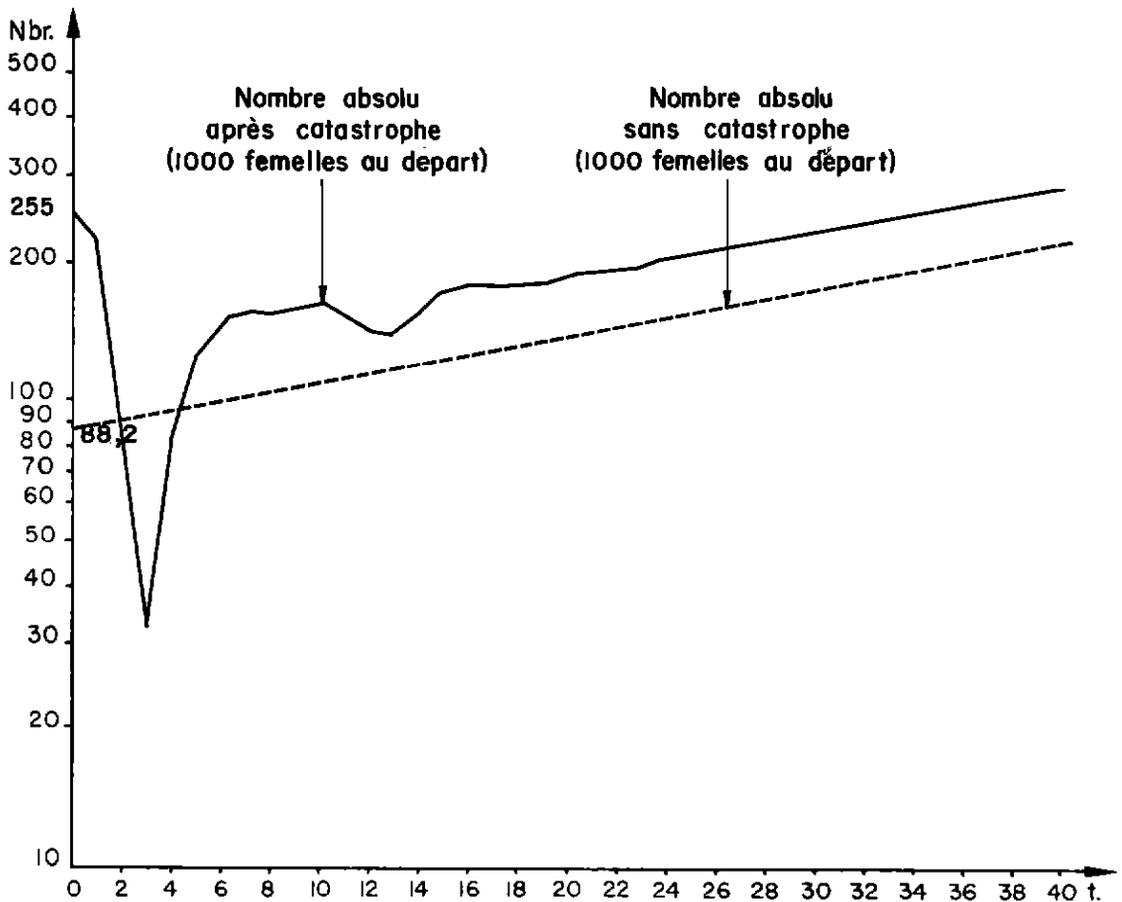
Graphique 3 : $n_{2,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{2,t} = & 127,525 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 72,110 \cdot (0,857)^t \cdot \cos (55,159 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 57,901 \cdot (0,835)^t \cdot \cos (30,508 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 20,162 \cdot (0,763)^t \cdot \cos (14,192 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 5,645 \cdot (0,737)^t \cdot \cos (319,762 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 11,492 \cdot (0,691)^t \cdot \cos (188,952 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



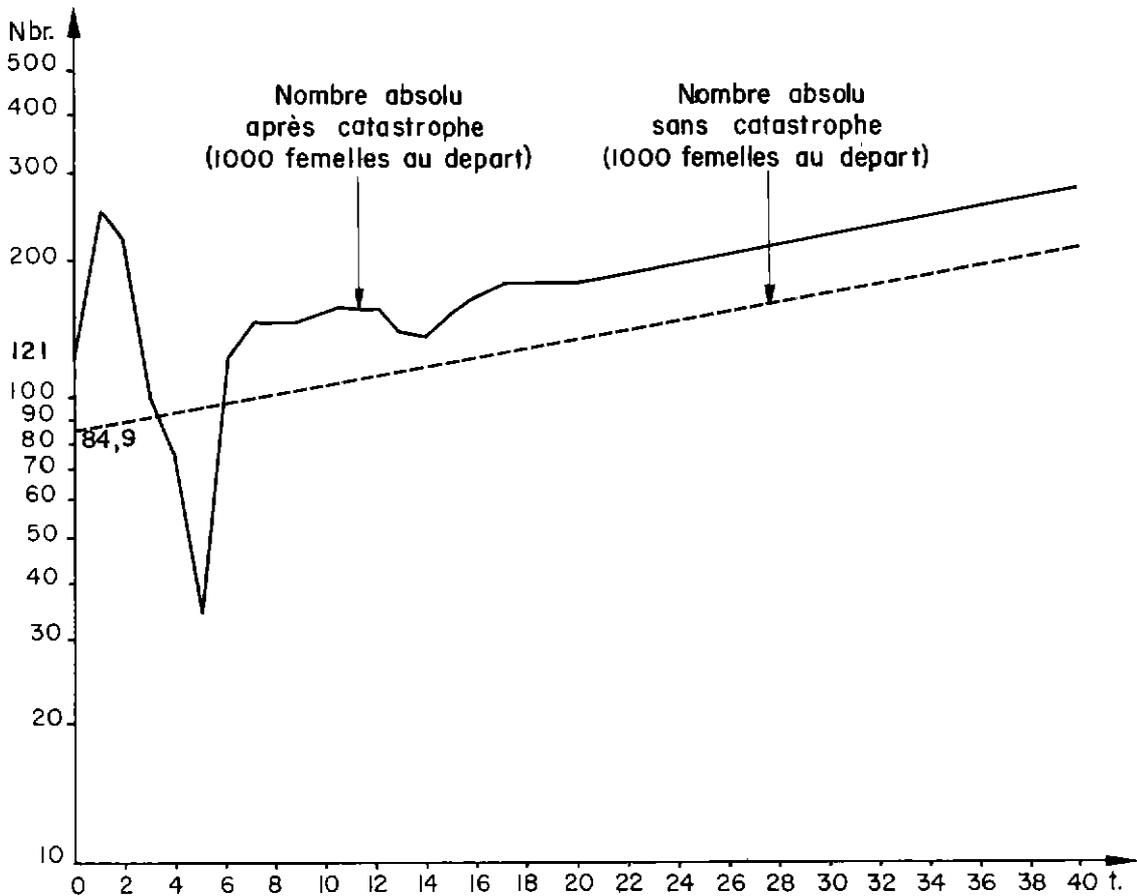
Graphique 4 : $n_{3,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{3,t} = & 118,488 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 81,152 \cdot (0,857)^t \cdot \cos (13,198 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 66,931 \cdot (0,835)^t \cdot \cos (318,576 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 25,510 \cdot (0,763)^t \cdot \cos (269,472 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 7,362 \cdot (0,737)^t \cdot \cos (182,300 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 16,054 \cdot (0,691)^t \cdot \cos (22,819 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



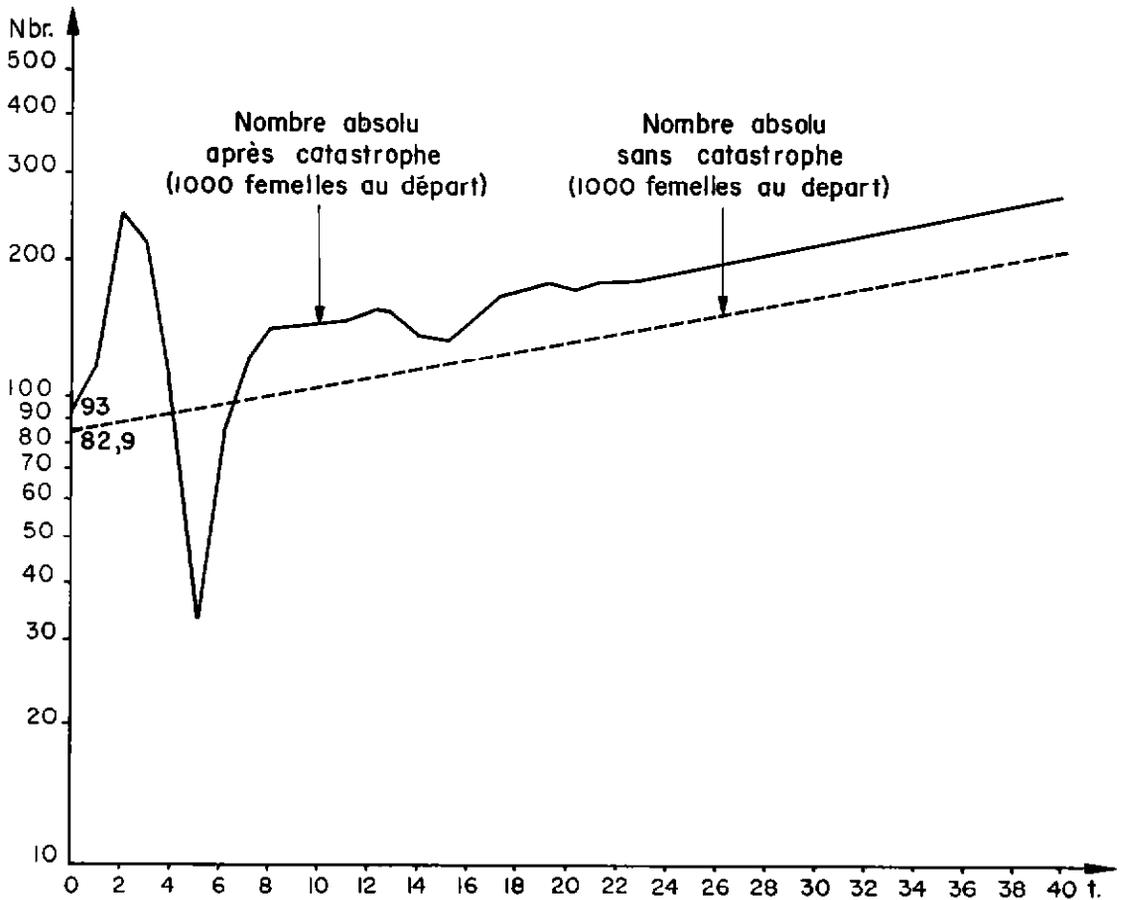
Graphique 5: $n_{4,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{4,t} = & 113,184 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 92,748 \cdot (0,857)^t \cdot \cos(331,238 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 78,573 \cdot (0,835)^t \cdot \cos(246,644 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 32,776 \cdot (0,763)^t \cdot \cos(164,752 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 9,786 \cdot (0,737)^t \cdot \cos(44,837 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 22,776 \cdot (0,691)^t \cdot \cos(216,686 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



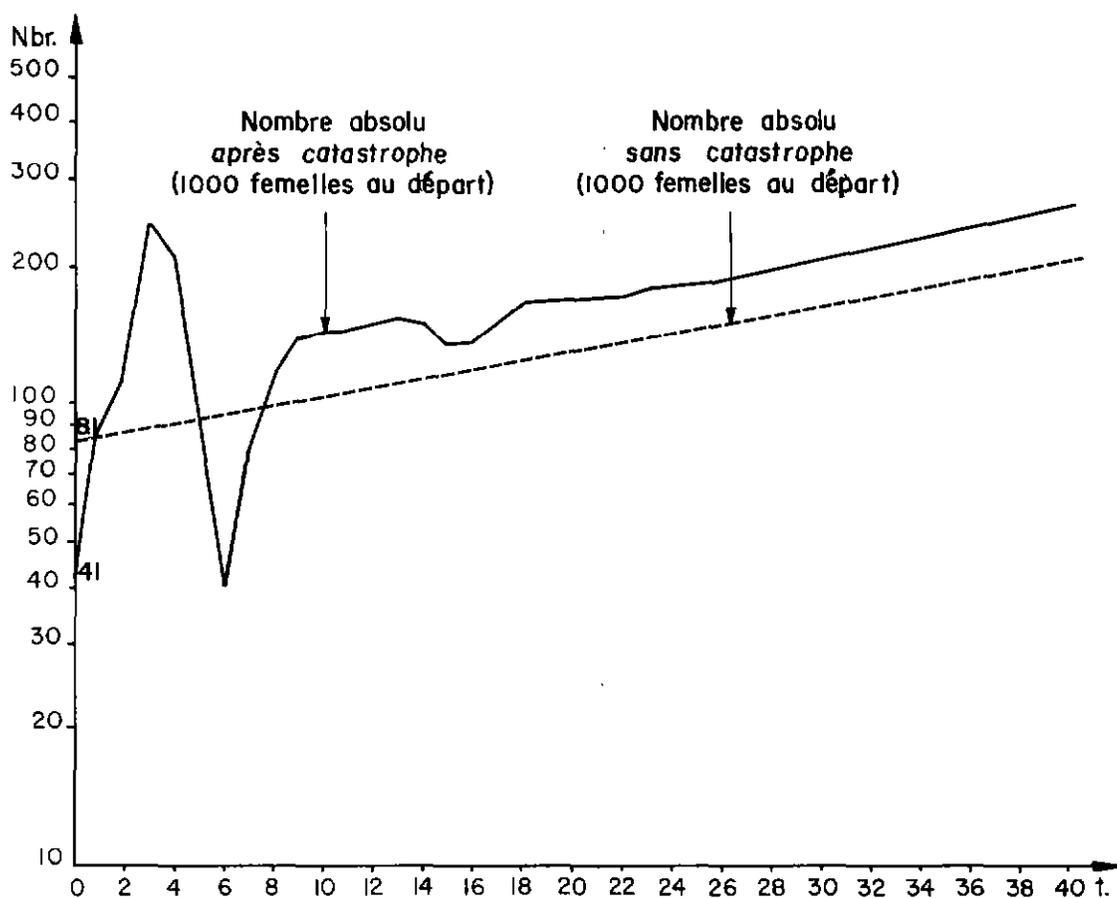
Graphique 6 : $n_{5,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{5,t} = & 108,883 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 106,001 \cdot (0,857)^t \cdot \cos (289,277 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 92,239 \cdot (0,835)^t \cdot \cos (174,712 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 42,113 \cdot (0,763)^t \cdot \cos (60,032 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 13,009 \cdot (0,737)^t \cdot \cos (267,375 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 32,311 \cdot (0,691)^t \cdot \cos (50,554 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



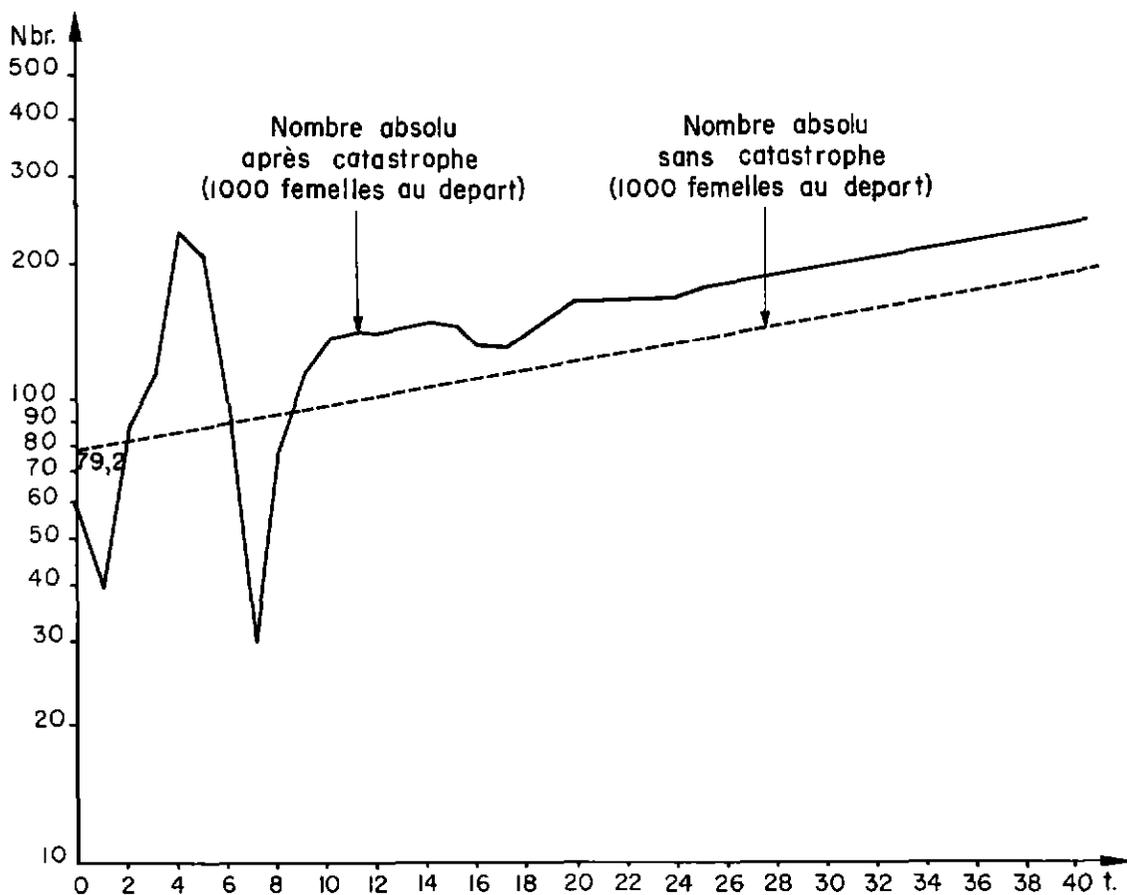
Graphique 7 : $n_{g,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{g,t} = & 104,376 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 121,147 \cdot (0,857)^t \cdot \cos(247,316 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 108,283 \cdot (0,835)^t \cdot \cos(102,780 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 54,110 \cdot (0,763)^t \cdot \cos(315,312 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 17,292 \cdot (0,737)^t \cdot \cos(129,912 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 45,839 \cdot (0,691)^t \cdot \cos(244,412 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



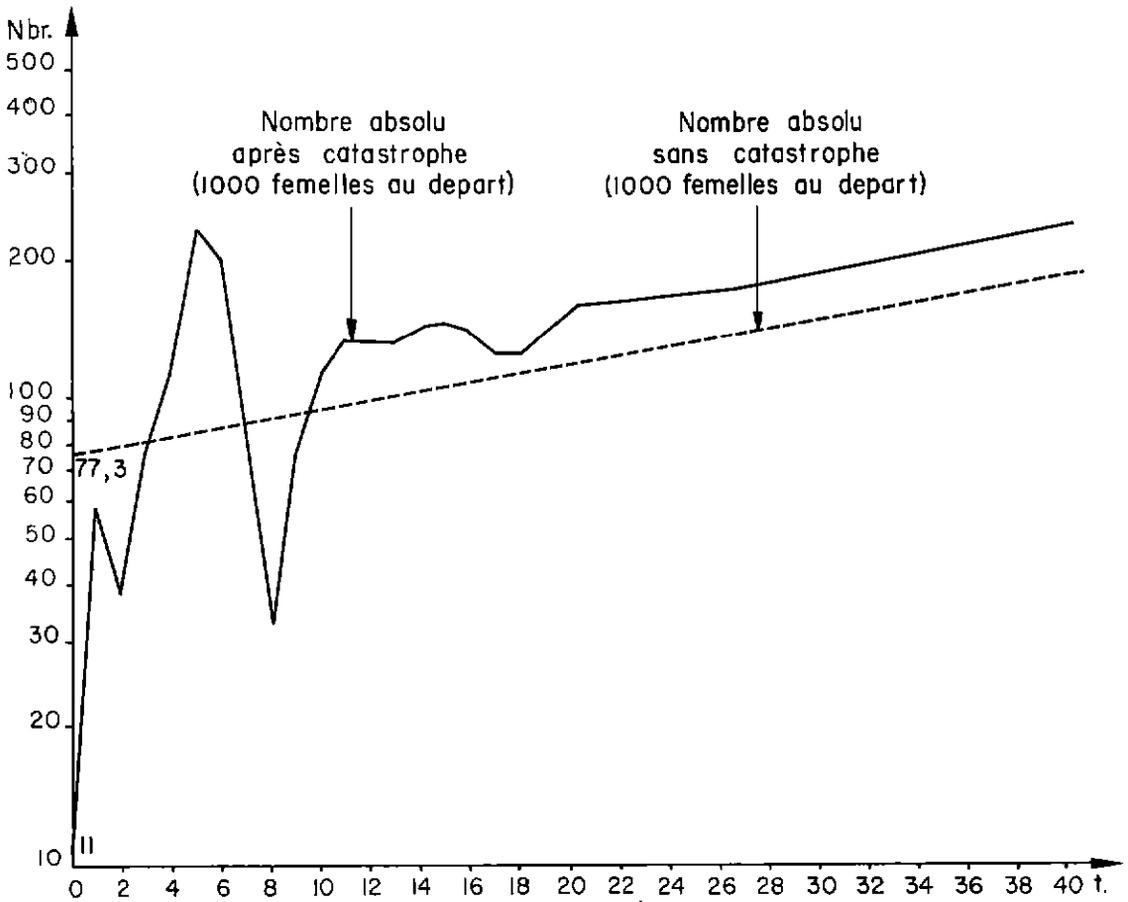
Graphique 8 : $n_{7,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{7,t} = & 100,056 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 138,458 \cdot (0,857)^t \cdot \cos (205,356 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 127,116 \cdot (0,835)^t \cdot \cos (30,849 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 69,524 \cdot (0,763)^t \cdot \cos (210,592 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 22,886 \cdot (0,737)^t \cdot \cos (352,449 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 65,030 \cdot (0,691)^t \cdot \cos (78,289 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



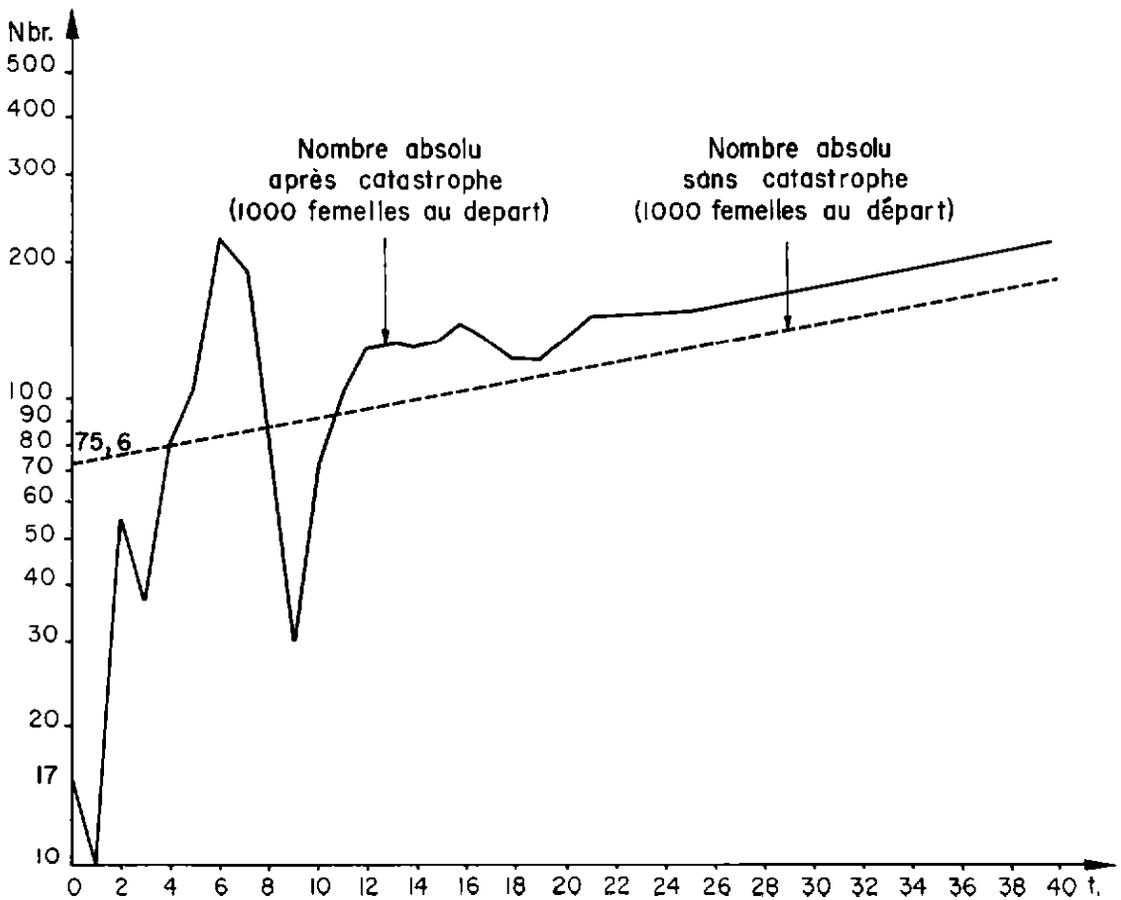
Graphique 9 : $n_{8,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{8,t} = & 95,915 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 158,242 \cdot (0,857)^t \cdot \cos (163,395 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 149,226 \cdot (0,835)^t \cdot \cos (318,917 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 89,329 \cdot (0,763)^t \cdot \cos (105,872 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 30,554 \cdot (0,737)^t \cdot \cos (214,987 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 92,255 \cdot (0,691)^t \cdot \cos (272,156 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



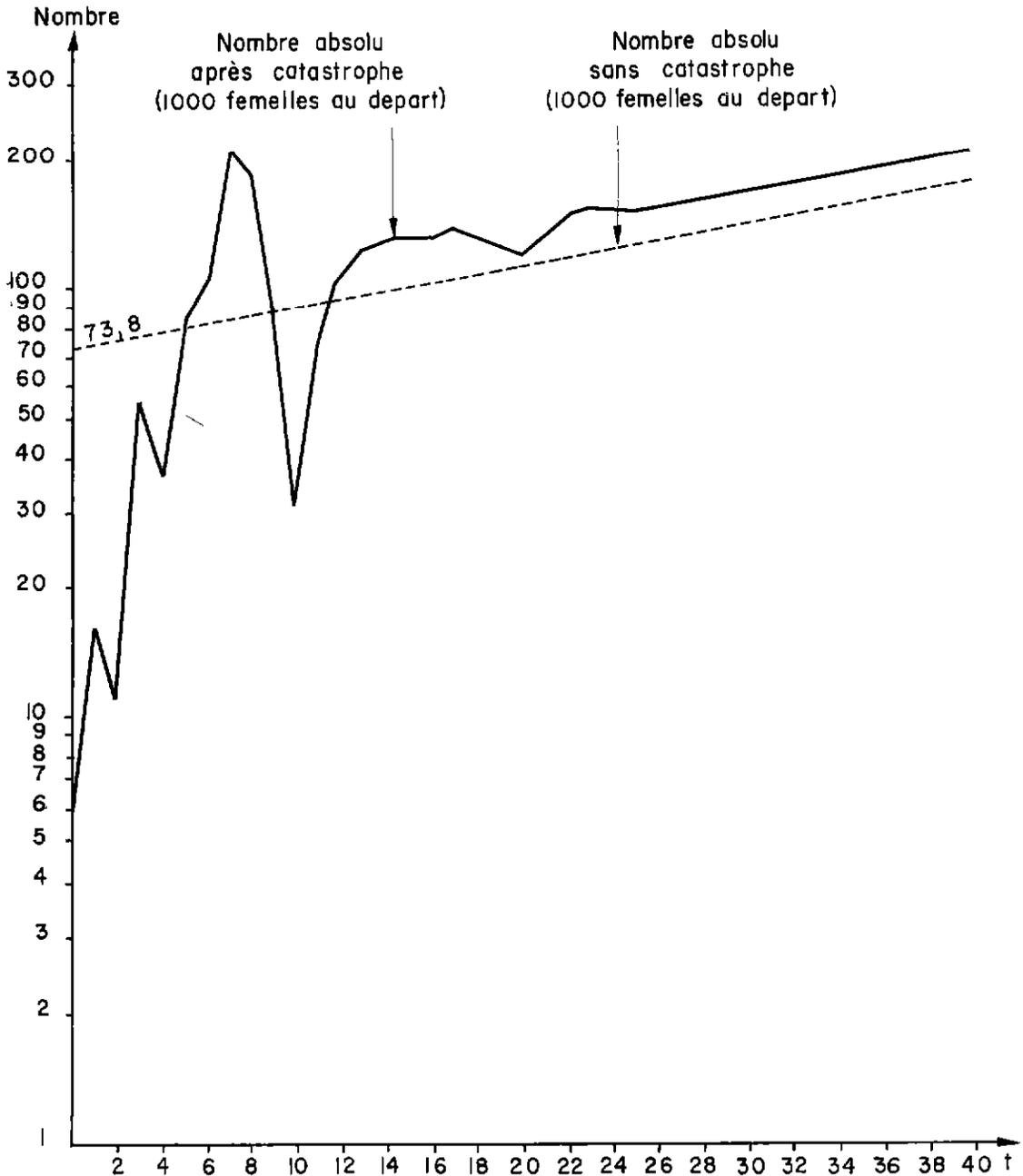
Graphique 10: $n_{0,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{0,t} = & 91,945 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 180,854 \cdot (0,857)^t \cdot \cos (121,434 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 175,181 \cdot (0,835)^t \cdot \cos (246,986 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 114,776 \cdot (0,763)^t \cdot \cos (1,152 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 40,615 \cdot (0,737)^t \cdot \cos (77,524 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 130,879 \cdot (0,691)^t \cdot \cos (106,023 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$



Graphique 11 : $n_{10,t}$

$$\begin{aligned}
 n_{10,t} = & 88,140 \cdot (1,022)^t + \\
 & + 206,696 \cdot (0,857)^t \cdot \cos (79,474 + 41,961 \cdot t) + \\
 & + 205,650 \cdot (0,835)^t \cdot \cos (175,053 + 71,932 \cdot t) + \\
 & + 147,472 \cdot (0,763)^t \cdot \cos (- 103,567 + 104,720 \cdot t) + \\
 & + 53,989 \cdot (0,737)^t \cdot \cos (- 59,938 + 137,463 \cdot t) + \\
 & + 185,673 \cdot (0,691)^t \cdot \cos (- 60,109 + 166,133 \cdot t) .
 \end{aligned}$$

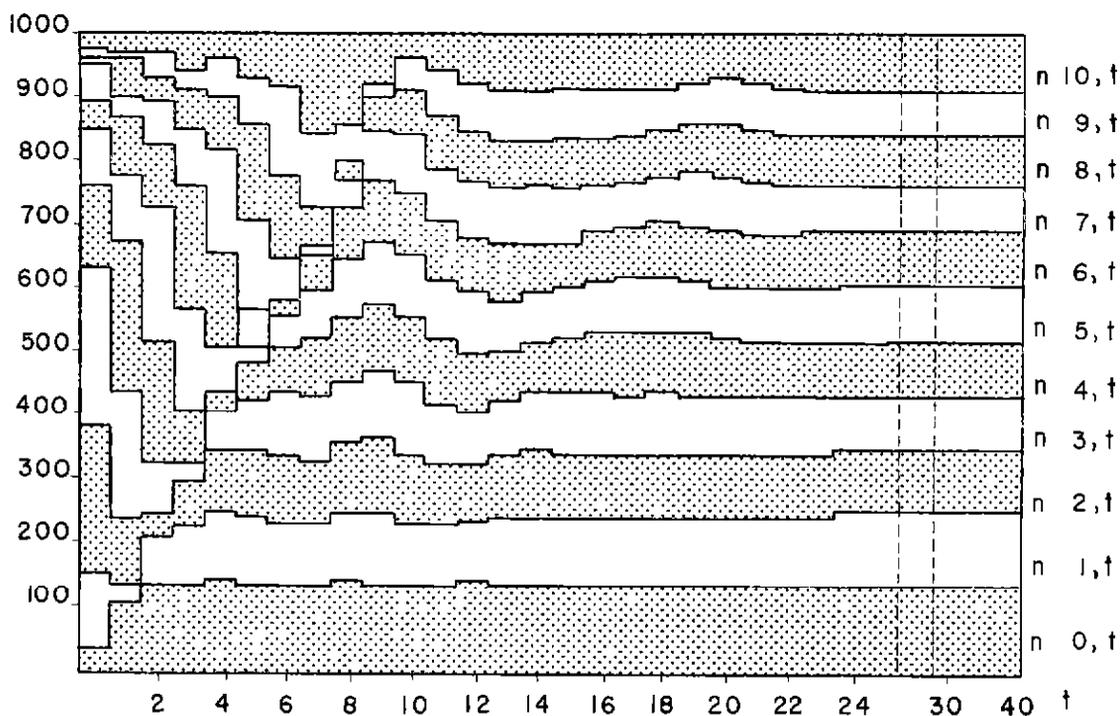


Le graphique 12 précise, en fonction du temps, la fluctuation de la composition du troupeau femelle ramenée à 1 000 femelles vers le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 (appelée précédemment λ) de module maximal. On peut constater, avec le type de catastrophe envisagé, que le pourcentage de l'effectif de la classe d'âge des 0 à 1 an se stabilise très vite, mais que progressivement, en atteignant les classes d'âge plus âgées, il faut attendre jusqu'à 21 ans pour retrouver une composition stable du troupeau, ce que les graphiques des compositions par classes d'âge font également ressortir.

2.4.2. Conclusion : évolution globale du troupeau

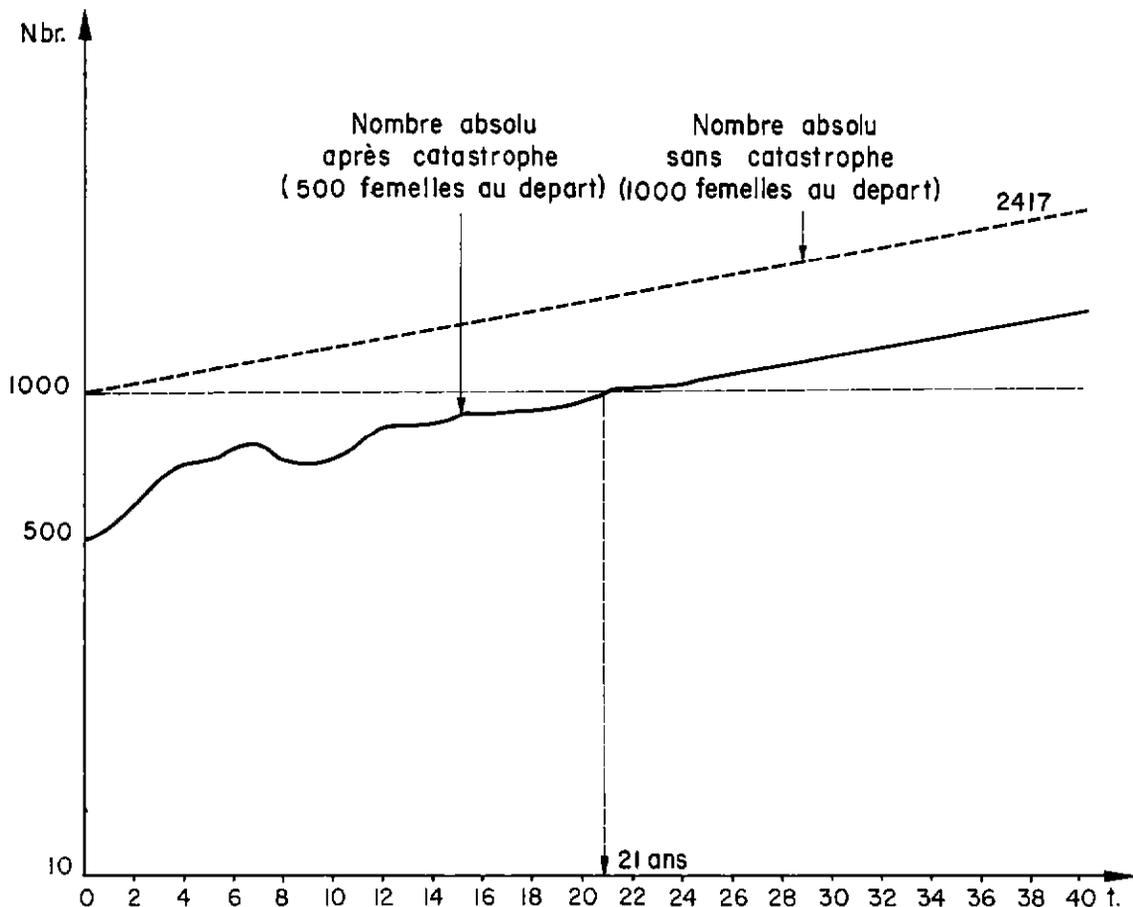
Le graphique 13 permet de comparer en nombre absolu, les effectifs d'un troupeau avec et sans catastrophe. La courbe représentant le troupeau après catastrophe a été établie pour une mortalité supposée de 50 p. 100 de l'effectif total initial et cette courbe retrouve une ordonnée de 1 000 c'est-à-dire l'effectif initial après 21 ans. En prenant successivement pour origine des ordonnées de la courbe les points correspondant à un pourcentage de mortalité global différent, la translation permet de trouver le temps au bout duquel l'effectif initial est à nouveau atteint :

- pour une mortalité de 10 p. 100 de l'effectif initial, le cheptel est reconstitué au bout de 2 ans;
- pour 20 p. 100, il faut 3 ans;
- pour 30 p. 100, il faut 4 ans, mais par suite de fluctuations, cet effectif global rechute et ne réatteint l'effectif initial qu'après 10 ans;
- pour 40 p. 100, il faut 12 ans;
- pour 50 p. 100, il faut 21 ans;
- pour 60 p. 100, il faut 30 ans;
- pour 70 p. 100, il faut 43 ans;



Graphique 12

Fluctuation de la composition du troupeau femelle, en fonction du temps, vers le vecteur propre associé à la valeur propre de module maximal.



Graphique 13
Evolution comparée du troupeau femelle sans et avec catastrophe
(mortalité supposée de 50 p. 100).

- pour 80 p. 100, il faut 61 ans;
- pour 90 p. 100, il faut 85 ans.

Cet exemple, avec tout ce qu'il comporte de théorique, car qui peut prétendre connaître l'avenir, montre que, si les paramètres démographiques restent constants dans le temps, la durée de reconstitution du cheptel devient très vite considérable dès que la mortalité prend quelque importance.

Cette constatation prouve, s'il en était besoin, l'impérieuse nécessité de l'aide aux régions sinistrées.

BIBLIOGRAPHIE

1. ACHER (J.) et GARDELLE (J.). Algèbre linéaire et programmation linéaire. Dunod. 304 p.
2. LE BRAS (H.). Retour d'une population à l'état stable après une catastrophe. *Population*, 1969, 24, 5 : 861-896.
3. LESLIE (P.M.). On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika*, 1945, 33, 3 : 183-212.
4. SHAN S. KUO. Numerical methods and computers. Addison Wesley Publishing Company. 341 p.
5. TACHER (G.). Notes sur la démographie bovine au Sahel. I. Représentation et projection théoriques du troupeau par un modèle mathématique. *Rev. Elev. Méd. vét. Pays trop.* 1975, 28 (4) et rapport Laboratoire de Farcha. 24 p. ronéo.

ANNEXE

MATRICE [P]—1

Première ligne

$$x_{1,1} = 0,261; x_{1,2} = 0,333; x_{1,3} = 0,368; x_{1,4} = 0,390; x_{1,5} = 0,373; x_{1,6} = 0,322; \\ x_{1,7} = 0,269; x_{1,8} = 0,214; x_{1,9} = 0,156; x_{1,10} = 0,095; x_{1,11} = 0,032.$$

Deuxième ligne

$$x_{2,1} = 0,496 e^{-1.18,623}; x_{2,2} = 0,532 e^{1.23,337}; x_{2,3} = 0,493 e^{1.65,298}; \\ x_{2,4} = 0,438 e^{1.107,259}; x_{2,5} = 0,446 e^{1.150,934}; x_{2,6} = 0,503 e^{-1.174,738}; \\ x_{2,7} = 0,506 e^{-1.146,100}; x_{2,8} = 0,451 e^{-1.120,544}; x_{2,9} = 0,349 e^{-1.07,077}; \\ x_{2,10} = 0,216 e^{-1.75,696}; x_{2,11} = 0,074 e^{-1.60,587}.$$

Troisième ligne

$$x_{3,1} = 0,496 e^{1.18,623}; x_{3,2} = 0,532 e^{-1.23,337}; x_{3,3} = 0,493 e^{-1.65,298}; \\ x_{3,4} = 0,438 e^{-1.107,259}; x_{3,5} = 0,446 e^{-1.150,934}; x_{3,6} = 0,503 e^{1.174,738}; \\ x_{3,7} = 0,506 e^{1.146,100}; x_{3,8} = 0,451 e^{1.120,544}; x_{3,9} = 0,349 e^{1.07,077}; \\ x_{3,10} = 0,216 e^{1.75,696}; x_{3,11} = 0,074 e^{1.60,587}.$$

Quatrième ligne

$$x_{4,1} = 0,634 e^{1.0,962}; x_{4,2} = 0,662 e^{1.72,894}; x_{4,3} = 0,597 e^{1.144,826}; \\ x_{4,4} = 0,517 e^{1.216,758}; x_{4,5} = 0,423 e^{-1.81,812}; x_{4,6} = 0,202 e^{-1.18,636}; \\ x_{4,7} = 0,148 e^{1.114,145}; x_{4,8} = 0,289 e^{-1.176,809}; x_{4,9} = 0,331 e^{-1.133,254}; \\ x_{4,10} = 0,251 e^{-1.96,430}; x_{4,11} = 0,097 e^{-1.70,972}.$$

Cinquième ligne

$$x_{5,1} = 0,634 e^{-1.0,962}; x_{5,2} = 0,662 e^{-1.72,894}; x_{5,3} = 0,597 e^{-1.144,826}; \\ x_{5,4} = 0,517 e^{-1.216,758}; x_{5,5} = 0,423 e^{1.81,812}; x_{5,6} = 0,202 e^{1.18,636}; \\ x_{5,7} = 0,148 e^{-1.114,145}; x_{5,8} = 0,289 e^{1.176,809}; x_{5,9} = 0,331 e^{1.133,254}; \\ x_{5,10} = 0,251 e^{1.96,430}; x_{5,11} = 0,097 e^{1.70,972}.$$

Sixième ligne

$$x_{6,1} = 0,863 e^{1.17,776}; x_{6,2} = 0,823 e^{1.122,496}; x_{6,3} = 0,678 e^{1.227,216}; \\ x_{6,4} = 0,536 e^{1.331,936}; x_{6,5} = 0,373 e^{1.91,300}; x_{6,6} = 0,512 e^{1.196,782}; \\ x_{6,7} = 0,408 e^{-1.90,475}; x_{6,8} = 0,096 e^{1.6,084}; x_{6,9} = 0,238 e^{1.179,443}; \\ x_{6,10} = 0,298 e^{-1.123,871}; x_{6,11} = 0,144 e^{-1.86,945}.$$

Septième ligne

$$x_{7,1} = 0,863 e^{-1.17,776}; x_{7,2} = 0,823 e^{-1.122,496}; x_{7,3} = 0,678 e^{-1.227,216}; \\ x_{7,4} = 0,536 e^{-1.331,936}; x_{7,5} = 0,373 e^{-1.91,300}; x_{7,6} = 0,512 e^{-1.196,782}; \\ x_{7,7} = 0,408 e^{1.90,475}; x_{7,8} = 0,096 e^{-1.6,084}; x_{7,9} = 0,238 e^{-1.179,443}; \\ x_{7,10} = 0,298 e^{1.123,871}; x_{7,11} = 0,144 e^{1.86,945}.$$

Huitième ligne

$$x_{8,1} = 1,085 e^{1.37,924}; x_{8,2} = 1,000 e^{1.175,386}; x_{8,3} = 0,797 e^{1.312,849}; \\ x_{8,4} = 0,609 e^{1.450,311}; x_{8,5} = 0,595 e^{-1.134,506}; x_{8,6} = 0,271 e^{-1.33,209}; \\ x_{8,7} = 0,272 e^{1.174,551}; x_{8,8} = 0,334 e^{-1.104,510}; x_{8,9} = 0,036 e^{-1.105,161}; \\ x_{8,10} = 0,252 e^{-1.141,469}; x_{8,11} = 0,188 e^{-1.99,539}.$$

Neuvième ligne

$$x_{9,1} = 1,085 e^{-1.37,924}; x_{9,2} = 1,000 e^{-1.175,386}; x_{9,3} = 0,797 e^{-1.312,849}; \\ x_{9,4} = 0,609 e^{-1.450,311}; x_{9,5} = 0,595 e^{1.134,506}; x_{9,6} = 0,271 e^{1.33,209}; \\ x_{9,7} = 0,272 e^{-1.174,551}; x_{9,8} = 0,334 e^{1.104,510}; x_{9,9} = 0,036 e^{1.105,161}; \\ x_{9,10} = 0,252 e^{1.141,469}; x_{9,11} = 0,188 e^{1.99,539}.$$

Dixième ligne

$$x_{10,1} = 1,395 e^{1.70,825}; x_{10,2} = 1,204 e^{1.236,957}; x_{10,3} = 0,900 e^{1.403,090}; \\ x_{10,4} = 0,644 e^{1.509,222}; x_{10,5} = 0,382 e^{-1.7,182}; x_{10,6} = 0,442 e^{1.213,289}; \\ x_{10,7} = 0,294 e^{-1.53,288}; x_{10,8} = 0,248 e^{1.216,766}; x_{10,9} = 0,275 e^{-1.81,021}; \\ x_{10,10} = 0,178 e^{1.235,261}; x_{10,11} = 0,257 e^{-1.95,308}.$$

Onzième ligne

$$\begin{aligned}x_{11,1} &= 1,395 e^{-1.70,825}; x_{11,2} = 1,204 e^{-1.236,957}; x_{11,3} = 0,900 e^{-1.403,090}; \\x_{11,4} &= 0,644 e^{-1.569,222}; x_{11,5} = 0,382 e^{i.7,182}; x_{11,6} = 0,442 e^{-i.213,289}; \\x_{11,7} &= 0,294 e^{i.53,288}; x_{11,8} = 0,248 e^{-1.216,766}; x_{11,9} = 0,275 e^{i.61,021}; \\x_{11,10} &= 0,178 e^{-1.235,261}; x_{11,11} = 0,257 e^{i.95,308}.\end{aligned}$$

MATRICE [P]*Première colonne*

$$\begin{aligned}x_{1,1} &= 0,524; x_{2,1} = 0,410; x_{3,1} = 0,371; x_{4,1} = 0,350; x_{5,1} = 0,336; x_{6,1} = 0,322; \\x_{7,1} &= 0,309; x_{8,1} = 0,296; x_{9,1} = 0,283; x_{10,1} = 0,272; x_{11,1} = 0,261.\end{aligned}$$

Deuxième colonne

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= 0,172 e^{i.400,983}; x_{2,2} = 0,161 e^{i.359,023}; x_{3,2} = 0,173 e^{i.317,062}; \\x_{4,2} &= 0,195 e^{i.275,101}; x_{5,2} = 0,223 e^{i.233,141}; x_{6,2} = 0,255 e^{i.191,180}; \\x_{7,2} &= 0,291 e^{i.149,219}; x_{8,2} = 0,333 e^{i.107,259}; x_{9,2} = 0,380 e^{i.65,298}; \\x_{10,2} &= 0,434 e^{i.23,337}; x_{11,2} = 0,496 e^{-i.18,623}.\end{aligned}$$

Troisième colonne

$$\begin{aligned}x_{1,3} &= 0,172 e^{-1.400,983}; x_{2,3} = 0,161 e^{-1.359,023}; x_{3,3} = 0,173 e^{-1.317,062}; \\x_{4,3} &= 0,195 e^{-1.275,101}; x_{5,3} = 0,223 e^{-1.233,141}; x_{6,3} = 0,255 e^{-1.191,180}; \\x_{7,3} &= 0,291 e^{-i.149,219}; x_{8,3} = 0,333 e^{-i.107,259}; x_{9,3} = 0,380 e^{-i.65,298}; \\x_{10,3} &= 0,434 e^{-1.23,337}; x_{11,3} = 0,496 e^{i.18,623}.\end{aligned}$$

Quatrième colonne

$$\begin{aligned}x_{1,4} &= 0,168 e^{i.720,282}; x_{2,4} = 0,161 e^{i.648,350}; x_{3,4} = 0,179 e^{i.576,418}; \\x_{4,4} &= 0,206 e^{i.504,486}; x_{5,4} = 0,242 e^{i.432,554}; x_{6,4} = 0,284 e^{i.360,622}; \\x_{7,4} &= 0,334 e^{i.288,690}; x_{8,4} = 0,392 e^{i.216,758}; x_{9,4} = 0,460 e^{i.144,826}; \\x_{10,4} &= 0,540 e^{i.72,894}; x_{11,4} = 0,634 e^{i.0,962}.\end{aligned}$$

Cinquième colonne

$$\begin{aligned}x_{1,5} &= 0,168 e^{-1.720,282}; x_{2,5} = 0,161 e^{-1.648,350}; x_{3,5} = 0,179 e^{-1.576,418}; \\x_{4,5} &= 0,206 e^{-i.504,486}; x_{5,5} = 0,242 e^{-1.432,554}; x_{6,5} = 0,284 e^{-i.360,622}; \\x_{7,5} &= 0,334 e^{-1.288,690}; x_{8,5} = 0,392 e^{-1.216,758}; x_{9,5} = 0,460 e^{-i.144,826}; \\x_{10,5} &= 0,540 e^{-1.72,894}; x_{11,5} = 0,634 e^{-i.0,962}.\end{aligned}$$

Sixième colonne

$$\begin{aligned}x_{1,6} &= 0,093 e^{i.1064,975}; x_{2,6} = 0,097 e^{i.960,255}; x_{3,6} = 0,118 e^{i.855,535}; \\x_{4,6} &= 0,149 e^{i.750,816}; x_{5,6} = 0,192 e^{i.646,096}; x_{6,6} = 0,246 e^{i.541,376}; \\x_{7,6} &= 0,317 e^{i.436,656}; x_{8,6} = 0,407 e^{i.331,936}; x_{9,6} = 0,523 e^{i.227,216}; \\x_{10,6} &= 0,672 e^{i.122,496}; x_{11,6} = 0,863 e^{i.17,776}.\end{aligned}$$

Septième colonne

$$\begin{aligned}x_{1,7} &= 0,093 e^{-1.1064,975}; x_{2,7} = 0,097 e^{-1.960,255}; x_{3,7} = 0,118 e^{-1.855,535}; \\x_{4,7} &= 0,149 e^{-i.750,816}; x_{5,7} = 0,192 e^{-1.646,096}; x_{6,7} = 0,246 e^{-i.541,376}; \\x_{7,7} &= 0,317 e^{-i.436,656}; x_{8,7} = 0,407 e^{-i.331,936}; x_{9,7} = 0,523 e^{-i.227,216}; \\x_{10,7} &= 0,672 e^{-i.122,496}; x_{11,7} = 0,863 e^{-i.17,776}.\end{aligned}$$

Huitième colonne

$$\begin{aligned}x_{1,8} &= 0,083 e^{i.1412,549}; x_{2,8} = 0,090 e^{i.1275,087}; x_{3,8} = 0,113 e^{i.1137,624}; \\x_{4,8} &= 0,148 e^{i.1000,162}; x_{5,8} = 0,197 e^{i.862,699}; x_{6,8} = 0,261 e^{i.725,237}; \\x_{7,8} &= 0,348 e^{i.587,774}; x_{8,8} = 0,462 e^{i.450,311}; x_{9,8} = 0,614 e^{i.312,849}; \\x_{10,8} &= 0,816 e^{i.175,386}; x_{11,8} = 1,085 e^{i.37,924}.\end{aligned}$$

Neuvième colonne

$$\begin{aligned}x_{1,9} &= 0,083 e^{-1.1412,549}; x_{2,9} = 0,090 e^{-1.1275,087}; x_{3,9} = 0,113 e^{-1.1137,624}; \\x_{4,9} &= 0,148 e^{-i.1000,162}; x_{5,9} = 0,197 e^{-i.862,699}; x_{6,9} = 0,261 e^{-i.725,237}; \\x_{7,9} &= 0,348 e^{-i.587,774}; x_{8,9} = 0,462 e^{-i.450,311}; x_{9,9} = 0,614 e^{-i.312,849}; \\x_{10,9} &= 0,816 e^{-i.175,386}; x_{11,9} = 1,085 e^{-i.37,924}.\end{aligned}$$

Dixième colonne

$$\begin{aligned}
 x_{1,10} &= 0,056 e^{i.1732,150}; x_{2,10} = 0,064 e^{i.1566,018}; x_{3,10} = 0,086 e^{i.1399,885}; \\
 x_{4,10} &= 0,121 e^{i.1233,753}; x_{5,10} = 0,171 e^{i.1067,620}; x_{6,10} = 0,243 e^{i.901,488}; \\
 x_{7,10} &= 0,344 e^{i.735,355}; x_{8,10} = 0,489 e^{i.569,222}; x_{9,10} = 0,693 e^{i.403,090}; \\
 x_{10,10} &= 0,983 e^{i.236,957}; x_{11,10} = 1,395 e^{i.70,825}.
 \end{aligned}$$

Onzième colonne

$$\begin{aligned}
 x_{1,11} &= 0,056 e^{-i.1732,150}; x_{2,11} = 0,064 e^{-i.1566,018}; x_{3,11} = 0,086 e^{-i.1399,885}; \\
 x_{4,11} &= 0,121 e^{-i.1233,753}; x_{5,11} = 0,171 e^{-i.1067,620}; x_{6,11} = 0,243 e^{-i.901,488}; \\
 x_{7,11} &= 0,344 e^{-i.735,355}; x_{8,11} = 0,489 e^{-i.569,222}; x_{9,11} = 0,693 e^{-i.403,090}; \\
 x_{10,11} &= 0,983 e^{-i.236,957}; x_{11,11} = 1,395 e^{-i.70,825}.
 \end{aligned}$$