Photo Lepître.

Côte-d'Ivoire — Forêt du Banco.

LES TARIFS DE CUBAGE

par J.-P. LANLY,
Ingénieur de Recherches
au Centre Technique Forestier Tropical.

SUMMARY

TREE VOLUME TARIFF TABLES

Drawing up a tree volume tariff table consists of determining, from a sample of trees, the relationships existing for a given stand between certain characteristics of the tree (circumference, diameter, height of bole, etc.) and its volume.

In the first section, the author specifies the conditions of utilization of a tree volume tariff table and the data of the problem. In a second section he examines simple tree volume tariff tables (graphic or semi-graphic methods, calculation of average volume by category of diameter, modern mathematical tariff tables). In a third section, the author studies the accuracy which can be expected from these tariff table, according to the method used. A fourth section is 'devoted to the establishing of a simple tariff table (definition of the tariff table, choice of sample, cubage of trees, collation of data, determination of the tariff table).

RESUMEN

LAS TARIFAS DE CUBICACION

El establecimiento de una tarifa de cubicación consiste en determinar, a partir de cierto número de muestras, las relaciones que existen para una plantación determinada entre ciertas características de un árbol (circunferencia, diámetro, altura del fuste, etc.) y su volumen.

El Autor sitúa, en la primera parte, las condiciones de utilización de una tarifa de cubicación y os datos fundamentales del problema. En la segunda parte, examina las tarifas de cubicación de una entrada (métodos gráficos o semigráficos, cálculo de un volumen medio por clase de diámetro, tarifas matemáticas modernas). En la tercera parte, el Autor estudia la precisión que se puede esperar de estas tarifas, según el método utilizado. Finalmente, la cuarta parte queda consagrada al establecimiento de una tarifa de cubicación de una entrada (definición de la tarifa, selección de la muestra, cubicación de los árboles, reagrupación de los datos fundamentales y determinación de la tarifa).

La connaissance des volumes est un élément primordial de celle des arbres et des peuplements. Surtout indispensable dans les opérations d'inventaire et d'exploitation, elle s'avère aussi nécessaire pour l'étude des méthodes d'aménagement des peuplements forestiers et d'une manière plus générale, dans la totalité des études concernant la forêt en tant que facteur de production.

La détermination aussi exacte que possible de cette quantité doit donc apparaître comme essentielle à tous les forestiers. Malheureusement ce problème ne semble pas avoir été étudié avec l'urgence qu'il mérite dans le domaine des forêts tropicales : le petit nombre des études faites sur cette question témoigne du peu d'intérêt qu'ont pu lui apporter les forestiers sans doute préoccupés par d'autres tâches plus absorbantes.

Qu'il s'agisse de l'inventaire précédant une exploitation, de l'étude d'un facteur (écartement des arbres, exposition, sol) sur la croissance d'un peuplement artificiel ou de l'évaluation du volume d'un arbre sur pied, on en revient toujours au problème suivant : **connaissant, pour les avoir mesurées, une ou plusieurs caractéristiques d'un arbre (diamètre ou circonférence, hauteur totale...) d'une certaine essence situé dans une zone déterminée, quelle est la fonction de ces caractéristiques qui donne la meilleure évaluation possible du volume de cet arbre,** qu'il s'agisse du volume de son fût, du volume total, branches comprises jusqu'à un diamètre minimum, ou encore du volume utile de billes que l'on peut en tirer ; c'est le problème de l'établissement d'un tarif de cubage, donnant pour chaque valeur (ou ensemble de valeurs) de la (ou des) caractéristique mesurée, la valeur correspondante du (ou des) volume que l'on veut connaître. Disons tout de suite qu'il s'agira, ayant choisi à l'intérieur du ou des peuplements auxquels est sensé s'appliquer le tarif de cubage, un certain nombre d'arbres (ou échantillon) pour chacun desquels on aura déterminé à la fois le volume et la (ou les) caractéristique, d'établir une relation entre ces caractéristiques et le volume d'un arbre du peuplement. L'utilisation de cette relation qui pourra être de nature algébrique ou graphique, permettra de déterminer le volume de n'importe quel arbre du peuplement connaissant la (ou les) caractérique en question.

La présente note n'a pas l'intention, on s'en doute, d'épuiser ce très vaste sujet ; notre propos consiste seulement, après avoir bien posé les données et les conditions du problème, de signaler quelques procédés simples qui pourront être utilisés.

I. — POSITION DU PROBLÈME

Il importe en premier lieu de bien définir le but et les conditions d'utilisation du tarif de cubage avant d'indiquer quelles en seront les caractéristiques et comment il convient de s'y prendre pour l'établir.

Les questions qu'il faut donc se poser sont relatives aux éléments suivants :

1° DOMAINE D'APPLICATION DU TARIF DE CUBAGE

Une règle générale est que l'échantillon destiné à l'établissement du tarif de cubage, doit être choisi parmi les populations correspondantes.

La « représentativité » de l'échantillon est une notion que nous aborderons dans ce paragraphe sous sa forme qualitative. Il sera question plus loin de l'efficacité, au sens statistique du terme, d'un échantillon suivant sa représentativité.

a) Nature des arbres.

Un tarif de cubage peut être appliqué aux arbres d'une essence, ou aux arbres d'un certain groupe d'essences. L'échantillon des arbres devra être tiré en conséquence. A moins de faire la preuve d'une très grande similitude entre deux essences A et B, on ne devra pas appliquer, sous peine d'erreurs incontrôlables, le tarif de cubage de l'essence A obtenu à partir d'un échantillon d'arbres de cette essence, aux arbres de l'essence B.

Lors de l'inventaire d'un peuplement naturel, dont on n'étudie qu'une trentaine ou une quarantaine d'essences, celles dites « commercialisables », on pourra ranger les essences en deux catégories :

— la ou les essences « principales » dont la probabilité d'exploitation est la plus grande, pour chacune desquelles on fera un tarif séparé.

— les essences secondaires, moins intéressantes pour l'ensemble desquelles on établira un seul tarif.

C'est ainsi qu'au Gabon, Bernard (2) a établi des tarifs de cubage pour l'Okoumé d'une part, et pour les Bois Divers d'autre part (cette appellation recouvrant un grand nombre d'espèces).

b) Dimensions.

Suivant le même principe qui veut que l'échantillon doive être choisi parmi les arbres que le tarif de cubage représente, on ne prendra pour constituer celui-ci que des arbres appartenant aux catégories de grosseur correspondantes. Ainsi il serait dangereux d'appliquer à de jeunes Okoumé un tarif de cubage établi avec un échantillon de gros arbres de cette essence et que l'on aura « extrapolé » d'une manière ou d'une autre aux petits diamètres.

c) Qualité.

A moins de s'intéresser aux arbres répondant à certains critères qualitatifs bien définis, il sera nécessaire que l'échantillon soit composé d'arbres de toutes catégories, c'est-à-dire, qu'il soit « représentatif » sur le plan de la qualité : le moyen le plus sûr reste le tirage au sort.

d) Localisation.

Il importe de délimiter le plus rigoureusement possible le domaine géographique de validité d'un tarif de cubage. Sans aller jusqu'à prôner un tarif de cubage pour une essence par station écologique se caractérisant par un certain type de sol, de climat, de topographie, de forêt, etc... — solution qui pourrait être néanmoins envisagée dans le cas d'une étude très précise sur la croissance d'une essence dans différentes conditions — nous ne saurions trop insister toutefois sur la nécessité de bien préciser la localisation de l'échantillon : on peut avoir, en effet, des types d'arbres très différents, suivant les variétés « géographiques » d'une essence. On précisera éventuellement aussi les différents facteurs écologiques qui influent sur le peuplement dont est tiré l'échantillon.

2° DÉFINITION DU VOLUME CHERCHÉ

Suivant les cas, il sera utile de connaître :

— **Le volume fût** ou volume de la tige depuis la naissance des contreforts jusqu'à la première grosse branche, que l'on pourra choisir dans les cas d'un aménagement de la forêt.

— **Le volume billes** (utilisables) qui intéresse plus particulièrement l'exploitant et le prospecteur chargé de l'inventaire préalable à l'exploitation.

Bien qu'étant le plus fréquemment nécessaire, il a l'inconvénient de faire intervenir un facteur d'appréciation personnelle et « occasionnel » qui est le critère relatif à la définition du terme « utilisable ».

On conçoit que ce tarif indique une corrélation moins forte entre le volume et les caractéristiques mesurées que le tarif fût obtenu à partir du même échantillon, les critères d'exploitabilité faisant intervenir un paramètre « qualité » sans lien de type fonctionnel, ou même étroit, avec les caractéristiques mesurées.

— **Le volume bois fort,** volume fût auquel on ajoute le volume de la surtige.

— **Le volume total**, volume bois fort plus volume des branches jusqu'à un certain diamètre, intéressant dans le cas d'un inventaire papetier.

Le tarif de cubage devra porter la mention du volume dont il donne la valeur. Rien n'empêche, à partir du même échantillon, d'établir les tarifs de cubage correspondant à ces différents volumes.

3° NOMBRE DE CARACTÉRISTIQUES MESURÉES

Le tarif de cubage donnera le volume d'un arbre d'une essence, ou d'un groupe d'essences donné, dans une région donnée, en fonction d'un certain nombre de paramètres qui seront essentiellement :

— **Le diamètre** (ou la circonférence, ou encore la surface terrière) qui intervient dans tous les tarifs :

- à la naissance des contreforts pour les essences à contreforts (Limba, Ayous).
- à hauteur de poitrine (1,30 m) pour les essences sans contreforts (Iroko).

— **La hauteur totale du fût** (spécialement pour le volume fût).

Les tarifs utilisant le seul diamètre, seront appelés tarifs de cubage à « une entrée », ceux utilisant le diamètre et la hauteur totale du fût seront les tarifs de cubage à « deux entrées » ou encore tables de cubage.

La précision donnée par les tarifs de cubage à une seule entrée est souvent excellente, eu égard à l'ensemble des erreurs inévitables provenant :

— du mode de cubage des arbres de l'échantillon qui donne un volume en général inférieur au volume réel (la formule dite commerciale permettant le cubage du fût :

$$V_c = \frac{\pi D^2}{4} H$$

où H est la hauteur totale, et D le diamètre à la hauteur $\frac{H}{2}$ peut donner une sous-estimation allant jusqu'à 15 % du volume réel) ;

— de l'obligation où l'on se trouve de classer les arbres par catégories de diamètre ou de surface terrière, et de faire correspondre par le tarif de cubage un même volume à tous les arbres ayant un diamètre intérieur à cette classe.

La perte relative de précision due au groupement est égale à (formule des corrections de Sheppard) :

$$\frac{\sqrt{\sigma^2 + \frac{a^2}{12}}}{\sigma} - 1$$

a étant la mesure de l'intervalle des classes, et σ^2 la variance exprimant la distribution du volume en fonction des caractéristiques cherchées.

Dans le cas de classe de surface terrière d'intervalle égale à 0,2 m² correspondant à des classes de volume de 2,9 m³, à propos d'un tarif de cubage du Sapelli en fonction des surfaces terrières, on a trouvé : $\sigma^2 = 6{,}74$ (variance du volume en fonction des surfaces terrières).

La perte de précision est donc égale à :

$$\frac{\sqrt{6{,}74 + 0{,}70}}{2{,}60} - 1 = 0{,}05 .$$

(Si l'erreur à craindre au seuil 0,95 sur les volumes, due au sondage, est de 20 %, cette classification introduit 1 % d'erreur supplémentaire).

Ces tarifs sont d'ailleurs largement utilisés en Europe. Des exemples montrent que quelle que soit la formule donnant le volume en fonction du diamètre à la base, la liaison entre ces deux quantités est excellente pour toutes les essences tropicales ayant fait l'objet d'un tarif et justifie pleinement l'adoption dans la majorité des cas de tels tarifs.

Aussi ne retiendrons-nous, par la suite, que les tarifs de cubage à une seule « entrée ».

D'autre part, le diamètre le moins difficile à mesurer étant le diamètre à hauteur de poitrine pour les espèces sans contreforts et le diamètre au-dessus des contreforts pour les essences qui en possèdent, nous nous bornerons, dans la suite, au cas des tarifs de cubage donnant le volume en fonction de ce diamètre, que nous appelerons pour plus de commodité diamètre « à la base ».

4° DIAMÈTRES OU SURFACES TERRIÈRES

On a coutume de ranger les arbres par classes de diamètre de 5 en 5 cm (pour les petits arbres), ou de 10 en 10 cm.

Le tarif de cubage quel qu'il soit, est alors appliqué en affectant à tous les arbres de chaque classe de diamètre un volume donné, correspondant au diamètre moyen de l'intervalle de la classe en question.

L'inconvénient majeur de cette façon de procéder, provient de ce que les volumes ne croissent pas proportionnellement à D, mais proportionnellement à une puissance de D comprise entre 2 et 3, donc beaucoup plus rapidement. Or, dans tous les inventaires de production où l'on détermine par parcelle le volume d'une essence donnée, il est intéressant statistiquement d'avoir des classes de volume égales ; une classification des arbres suivant des **classes de surface terrière** (d'intervalle proportionnel au carré du diamètre) est donc plus opportune puisqu'elle permet d'avoir des classes de volume plus égales (à la limite égales, si le tarif de cubage donne le volume en fonction du carré du diamètre).

Le tableau 1, relatif à un tarif de cubage du volume billes, du Sapelli sur un permis en Lobaye (République Centrafricaine) montre bien l'intérêt d'une telle façon de procéder.

TABLEAU 1 — *Comparaison des classes de diamètre et de surface terrière*

En Classes de Diamètre				En Classes de Surface Terrière					
Limites cm	Milieux des Classes cm	Volumes m³	Ecarts m³	Limites cm	Milieux des Classes cm	Limites m²	Classes m²	Volumes m³	Ecarts m³
55									
	60	3,6							
65			1,5	36,0		0,2			
	70	5,1			50,5		0,3	2,4	
75			1,8	62,0		0,4			2,9
	80	6,9			71,5		0,5	5,3	
85			2,1	80,0		0,6			3,1
	90	9,0			87,5		0,7	8,4	
95			2,4	94,5		0,8			3,3
	100	11,4			101,0		0,9	11,7	
105			2,8	107,0		1,0			3,4
	110	14,2			113,0		1,1	15,1	
115			3,1	118,5		1,2			3,5
	120	17,3			124,0		1,3	18,6	
125			3,5	129,0		1,4			3,5
	130	20,8			133,5		1,5	22,2	
135			3,8	138,0		1,6			3,7
	140	24,6			143,0		1,7	25,8	
145				147,0		1,8			

(tarif de la forme $V = AD^n$ où n est un exposant > 2)

II. — LES TARIFS DE CUBAGE A UNE ENTRÉE

Les données du problème ayant été ainsi posées, imaginons que nous ayons obtenu à partir d'un échantillon répondant aux conditions définies ci-dessus, **un ensemble de n couples de valeurs, D_i, diamètre à la base, et V_i, volume correspondant** (nous verrons plus loin comment il convient de choisir et de cuber cet échantillon). Comment obtenir à partir de ces valeurs le tarif de cubage cherché ?

Différentes méthodes sont possibles, que nous analyserons successivement :

1° MÉTHODES GRAPHIQUES, OU SEMI-GRAPHIQUES

a) Méthodes graphiques

On reporte sur un même graphique l'ensemble des couples de valeurs (V_i, D_i). Les volumes sont portés en ordonnées, les diamètres (ou circonférences ou surfaces terrières) en abscisses. L'ensemble des n points forme sur le graphique un nuage de points, qui sera d'autant plus effilé que la corrélation entre les volumes et les diamètres sera meilleure. On trace la ligne la plus régulière et continue possible, qui passe par le plus grand nombre de points et laisse approximativement autant de points au-dessus qu'en-dessous.

- 1) Si l'on porte D en abscisses, on obtiendra une courbe concave vers le haut et dont la courbure est de moins en moins prononcée quand le diamètre augmente.
- 2) Si l'on porte D^2 (ou les carrés des circonférences ou encore les surfaces terrières) on obtiendra une courbe très « aplatie » se rapprochant d'une ligne droite.
- 3) Si l'on porte log D en abscisses et log V en ordonnées, (graphique bi-logarithmique) on obtiendra aussi une courbe très voisine d'une droite.

Transport d'une bille de Sipo sur une route forestière.

Photo Lepître.

AVANTAGE :

— Simplicité, car absence de calculs.

INCONVÉNIENTS :

— Préférence donnée à la « belle » courbe sur la courbe « exacte ».

— Tentation et danger de l'extrapolation graphique.

— Difficulté de définir une courbe moyenne dans le cas d'un nuage de points trop étendu.

— Imprécision dans les catégories de diamètres ou de surfaces terrières où les données sont peu nombreuses.

— Ignorance sur la valeur de la corrélation entre V et D.

— Impossibilité de donner une estimation valable de l'erreur sur les volumes due au tarif de cubage

REMARQUES :

1) Si l'on désigne par $\bar{x}$ et $\bar{V}$ respectivement les moyennes des quantités correspondant aux abscisses (D, D^2, C^2 : carré des circonférences ou g : surface terrière) et aux ordonnées (volumes) que l'on pourra éventuellement calculer, la courbe correspondante devra passer par le point $\bar{x}$, $\bar{V}$, ou du moins à très peu de distance.

Une fois la courbe définitive reproduite, il suffira de déterminer sur le graphique, les ordonnées des points de la courbe correspondant aux diamètres, ou abscisses, des arbres dont on veut connaître le volume. En particulier, on déterminera ainsi les volumes correspondant aux centres des classes de diamètre ou de surface terrière adoptées.

2) On pourra rectifier les estimations données par le tarif de cubage de la manière suivante (cf. PARDÉ) :

si on applique à tous les arbres de l'échantillon le volume donné par la courbe ainsi dessinée, on obtiendra pour celui-ci le volume total V_T. Comme on connaît d'autre part le volume réel de l'échantillon, $V_R = \sum_i V_i$, il suffira d'appliquer aux cubages des peuplements qui seront faits par l'intermédiaire de ce tarif, le coefficient $\frac{V_R}{V_T}$ pour « redresser » les résultats.

b) Méthode semi-graphique de Keen et Page

La remarque 1 de l'alinéa précédent introduit la notion du point moyen ayant pour coordonnées :

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} \quad \text{et} \quad \bar{V} = \frac{\sum_i V_i}{n}$$

La méthode de Keen et Page consiste à diviser le plan graphique en deux demi-plans séparés par la droite verticale d'abscisse $\bar{x}$ et à tracer les demi-droites issues du point moyen laissant dans chacun de ces deux demi-plans, autant de points au dessus qu'en dessous. La courbe représentative sera la **droite bissectrice de l'angle formé par ces deux demi-droites.** On prendra de préférence $x = D^2$ ou $x = g$ à $x = D$ de manière à « étirer » le nuage de points et diminuer l'incertitude sur la position des demi-droites.

AVANTAGES :

— Simplicité, car absence de calculs (excepté ceux des moyennes :

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} \quad \text{et} \quad \bar{V} = \frac{\sum_i V_i}{n}$$

— Les critères utilisés (égalité du nombre de points de part et d'autre des demi-droites, bissectrice) étant précisés, toute appréciation subjective pouvant biaiser les résultats est écartée.

INCONVÉNIENTS :

— Ignorance sur la valeur de la corrélation entre x et V.

— Incertitude sur la précision du tarif de cubage.

— Hypothèse, *a priori* non vérifiée, sur la linéarité de la courbe représentant la liaison entre x et V.

Cependant si une telle hypothèse n'est pas valable dans le cas où la variable x est le diamètre ou la circonférence à la base, elle est légitime dans le cas où x représente le carré du diamètre ou de la circonférence ou encore la surface terrière g.

2° CALCUL D'UN VOLUME MOYEN PAR CLASSE DE DIAMÈTRE OU DE SURFACE TERRIÈRE

La solution la plus simple est évidemment de séparer l'ensemble des couples de valeurs (D_i, V_i) en classant les D_i par catégories de diamètre, et de **calculer pour chacune de ces classes le volume moyen en prenant la moyenne des volumes correspondants.**

Le tarif de cubage se présente sous la forme d'un tableau de correspondance entre les classes de diamètres et les volumes. Aucune formule n'est établie, caractérisant le tarif de cubage.

Exemple : On a tiré au sort 77 SAPELLI de diamètre supérieur à 80 cm qu'on a rangé par classes de surface terrière. Les résultats obtenus relativement au volume billes utilisables sont détaillés au tableau 2.

AVANTAGES : Ils sont d'ordre pratique : le procédé est en effet simple et exige peu de calculs en plus du cubage des arbres de l'échantillon.

INCONVÉNIENTS : Cette méthode risque si elle n'est pas appliquée avec suffisamment de prudence, de conclure à des « énormités ». L'illustration de ce fait est donnée par le tableau suivant où l'on peut voir que le volume moyen donné pour les arbres de

TABLEAU 2

Calcul d'un volume moyen par classe de surface terrière

N° de la classe (1)	Limites en diamètres cm (2)	Milieu de la classe cm (3)	Limites en surface terrière m² (4)	Milieu de la classe m² (5)	Effectif de la classe (6)	Volume moyen trouvé m³ (7)
	80,0		0,6			
3		87,5		0,7	23	8,6
	94,5		0,8			
4		101,0		0,9	13	13,0
	107,0		1,0			
5		113,0		1,1	18	15,2
	118,5		1,2			
6		124,0		1,3	10	20,1
	129,0		1,4			
7		133,5		1,5	5	23,4
	138,0		1,6			
8		143,0		1,7	4	23,0
	147,0		1,8			
9				$>1,9$	4	28,4
				Total	77	

la classe 8 est inférieur à celui donné pour les arbres de la classe 7 de diamètre plus petit. Cette anomalie provient de ce que l'échantillon des strates 7 et 8 (de même que 9) est insuffisant et que l'on a tiré dans la classe 8 deux arbres malades dont on a abandonné une bille, sur les quatre que contient la strate.

Le danger de cette méthode peut s'interpréter ainsi : il n'y a pas compensation par l'ensemble des chiffres des autres classes des erreurs importantes pouvant intervenir dans une classe, erreurs provenant, en général, d'un effectif trop faible de l'échantillon relativement à la classe considérée. Nous verrons dans l'étude des erreurs propres à chaque méthode comment on peut néanmoins remédier à cet inconvénient.

3° TARIFS MATHÉMATIQUES MODERNES

Nous inclurons essentiellement dans cette dénomination les tarifs se traduisant par les formules suivantes donnant le volume V en fonction du diamètre « à la base » D :

$$V = a + bD^2 \qquad (1)$$

a et b coefficients constants (ABADIE),

$$V = AD^p \qquad (2)$$

A et p coefficients constants (MEYER, BERNARD).

Si l'on transforme (2) en équation logarithmique, on obtient :

$$\log V = \log A + p \log D . \qquad (3)$$

On voit que les formules (1) et (3) sont les traductions algébriques du caractère linéaire des courbes évoquées au § 1°.

Avant d'examiner chacune de ces deux sortes de tarifs, voyons quelles sont les conditions de leur application.

a) Hypothèses de base

Pour pouvoir en toute rigueur, établir la légitimité et la précision de ces deux tarifs, il est nécessaire de faire les deux hypothèses suivantes :

• 1. — **Il existe entre les deux variables D² et V dans le cas du premier tarif, log D et log V dans le cas du second, une liaison.** L'expérience montre que cette hypothèse est pleinement justifiée, le diamètre (ou des variables le caractérisant) étant l'élément déterminant de la variation du volume.

Cependant, s'il existe quelque doute à ce sujet — ou si à titre d'information on désire connaître la « force » de cette corrélation — on peut calculer le **rapport de corrélation de V par rapport à D²** (dans le cas du premier tarif) et « tester » si sa valeur est significativement différente de zéro.

Le rapport de corrélation dans le cas du premier tarif est égal à :

$$\eta = \frac{\sum_{j=1}^{j=k} n_j (\overline{V}_j - \overline{V})^2}{\sum_{i=1}^{i=n} (V_i - \overline{V})^2}$$

en désignant par n_j les effectifs dans les classes de diamètre (ou de D², ou de surface terrière) choisies et $\bar{V}j$ la moyenne des volumes correspondants dans ces classes (1).

On forme alors la quantité :

$$\frac{n-k}{k-1} \times \frac{\eta^2}{1-\eta^2}$$

et on vérifie que ce nombre est supérieur au chiffre indiqué par la table de FISCHER-SNEDECOR, à la colonne n-k et à la ligne k-1 au seuil de probabilité choisi (0,05 ou 0, 01).

- 2. — Cette liaison est linéaire.

Les points représentatifs des arbres de l'échantillon dans des axes de coordonnées (D^2, V) ou (log D, log V) forment en général un nuage de points assez effilé le long d'une droite. Cependant cette constatation visuelle ne suffit pas en toute rigueur à affirmer que la liaison est linéaire et le procédé le plus sûr consiste à appliquer le **« test de linéarité de la régression de V en D^2 » (ou de log V en log D)** dont le but est de vérifier que les écarts par rapport à la droite de régression sont imputables au hasard de l'échantillonnage.

En conservant les notations précédentes et en désignant par :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (D_i^2 - \overline{D^2})(V_i - \bar{V})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} (D_i^2 - \overline{D^2})^2 \sum_{i=1}^{i=n} (V_i - \bar{V})^2}}$$

le **coefficient de corrélation**

on forme la quantité :

$$\frac{n-k}{k-2} \times \frac{\eta^2 - r^2}{1-\eta^2}$$

et on vérifie de même, que ce nombre est inférieur au nombre indiqué dans la table de FISCHER-SNEDECOR à la colonne $n-k$ et à la ligne $k-2$ au seuil de probabilité choisi (0,05 ou 0,01) auquel cas on peut affirmer que la liaison est linéaire.

REMARQUE IMPORTANTE.

La démarche logique exposée ci-dessus a l'inconvénient de nécessiter le calcul des quantités intervenant dans le rapport de corrélation η^2 qui sont inutiles pour l'établissement de la formule du tarif de cubage. Il est plus simple et plus rapide de **supposer à priori une relation linéaire et de vérifier que cette relation est « étroite », ce qui est en général le cas pour les couples de valeurs (V, D^2) et (log V, log D).**

(1) Pour le deuxième tarif, il suffit de remplacer dans la formule D^2 par log D et V par log V.

Pour cela, on calculera le coefficient de corrélation r :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (D_i^2 - \overline{D^2})(V_i - V)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} (D_i^2 - \overline{D^2})^2 \sum_{i=1}^{i=n} (V_i - \bar{V})^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} D_i^2 V_i - \bar{V} \sum_{i=1}^{i=n} D_i^2}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{i=n} D_i^4 - \overline{D^2} \sum_{i=1}^{i=n} D_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{i=n} V_i^2 - \bar{V} \sum_{i=1}^{i=n} V_i\right]}}$$

quantité égale à + 1 ou — 1, si la liaison entre D^2 et V (log D et log V) est celle d'une fonction linéaire, et nulle s'il y a absence de liaison. On testera donc le coefficient de corrélation en vérifiant que l'on a bien $r > r_0$, r_0 étant la valeur limite de r au seuil 0,05 donné par le tableau suivant (en fonction de l'effectif n de l'échantillon).

n	r_0	n	r_0
10	0,58	60	0,25
20	0,42	70	0,23
30	0,35	80	0,22
40	0,30	90	0,21
50	0,27	100	0,20

La signification statistique de r_0 est la suivante :

si $r = r_0$ on peut dire que l'on a 5 chances sur 100 pour que cette valeur estimée r à partir de l'échantillon corresponde à une valeur exacte $\rho = 0$ ou, ce qui revient au même, qu'il y a 95 chances sur 100 pour que r corresponde à une valeur exacte $\rho \neq 0$.

r mesure en quelque sorte l'« effilement » ou « resserrement » du nuage de points autour de la droite de régression de V en D^2 (ou log V en log D).

- 3. — La validité des conclusions que l'on peut tirer sur la nature de la liaison entre V et D^2 (ou log V et log D) et sur la précision du tarif utilisé, suppose aussi que **la population d'arbres dont est tiré l'échantillon soit distribuée « normalement » par rapport aux deux variables D^2 et V (ou log D et log V)** c'est-à-dire, en particulier, que :

— la distribution de V (ou log V) pour chaque classe de D^2 (ou de log D) est normale ou gaussienne,

— les variances ou les écarts-types liés de V (ou log V) dans chaque classe de D^2 (ou log D) sont constants quelles que soient ces quantités.

La critique statistique de la corrélation faite dans le paragraphe précédent suppose que cette condition est remplie.

b) Tarifs de cubage $V = a + bD^2$

L'équation du tarif $V = a + bD^2$ est l'équation de la droite de régression de la variable V en fonction de la variable D^2. C'est aussi l'équation de la

Forêt à Mansonia altissima et Terminalia superba — Bénin (Nigéria). →

Photo Bégué.

droite dite des « moindres carrés » pour laquelle : $\sum_i (M_i M'_i)^2$ = minimum (il existe un couple et un seul de valeurs a et b des coefficients de la droite pour l'ensemble des points $M_i(D_i^2, V_i)$ de l'échantillon). Si l'on pose $\overline{D^2} = \sum_i \frac{D_i^2}{n}$ et $\overline{V} = \sum_i \frac{V_i}{n}$ qui sont les coordonnées du point moyen $M(\overline{D^2}, \overline{V})$ par lequel passe la droite, l'équation de la droite s'écrit :

$$V = \underbrace{\left[\overline{V} - \overline{D^2}\, \frac{\sum_i D_i^2 V_i - \overline{V} \sum_i D_i^2}{\sum_i D_i^4 - \overline{D^2} \sum_i D_i^2} \right]}_{a} +$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{\sum_i D_i^2 V_i - \overline{V} \sum_i D_i^2}{\sum_i D_i^4 - \overline{D^2} \sum_i D_i^2} \right]}_{b} D^2$$

ou encore :

$$V - \overline{V} = \frac{\sum_i D_i^2 V_i - \overline{V} \sum_i D_i^2}{\sum_i D_i^4 - \overline{D^2} \sum_i D_i^2} (D^2 - \overline{D^2}) .$$

Le numérateur et le dénominateur de b sont respectivement le numérateur et le carré du premier facteur du dénominateur de r, coefficient de corrélation.

Une fois obtenue l'équation de la droite, il suffira de déterminer les valeurs de V correspondant aux diamètres moyens des classes de diamètre ou de surface terrière utilisées.

AVANTAGES :

1° Le calcul du coefficient de corrélation r (et éventuellement celui du rapport de corrélation η) permet d'éprouver la validité du tarif.

2° « Objectivité » du tarif.

A la différence des tarifs obtenus par les méthodes graphiques, celui-ci n'est pas fonction d'appréciations personnelles.

En particulier la droite de régression supprime l'incertitude pouvant résulter d'un petit nombre de mesures très dispersées dans une ou plusieurs classes de diamètre en faisant « supporter » par l'ensemble des classes la variabilité propre à certaines d'entre elles.

3° Détermination possible de l'erreur.

4° Simplicité de la formule.

Si l'on procède à un inventaire en mesurant non le diamètre des arbres mais leur surface terrière g, on aura une expression simple du volume :

$$V = a + bD^2 = a + b' g$$

Si l'on prend des classes de surface terrière conventionnelles exprimées par des entiers successifs :

$$n = kg_n$$

on aura :

$$V_n = a + b' g_n = a + b'' n .$$

5° Toujours dans le cas de mesure de surface terrière, on obtiendra, grâce à ce tarif, des classes de volume égales, ce qui offre un avantage considérable sur le plan statistique. L'intervalle des classes sera égal à : $b' : k = b''$.

INCONVÉNIENT :

C'est essentiellement celui du calcul des quantités

$$\sum_i (D_i^2 - \overline{D^2})^2 = \sum_i D_i^4 - \overline{D^2} \sum_i D_i^2$$

$$\sum_i (D_i^2 - \overline{D^2})(V_i - \overline{V}) = \sum_i D_i^2 V_i - \overline{V} \sum_i D_i^2$$

Cet inconvénient en fait pèse peu devant les avantages énoncés ci-dessus et un tarif de cubage sérieux apporte dans un aménagement ou un inventaire de forêt une précision assez grande sur des méthodes plus expédiées pour justifier le temps passé à les exécuter.

Les tarifs en $V = a + bD^2$ suffisamment sûrs et commodes à la fois seront préférés dans la majorité des cas. Seuls les tarifs en $V = AD^p$ peuvent apporter des avantages analogues, du moins en ce qui concerne la rigueur et la « sécurité ».

c) Tarifs en $V = AD^p$

L'idée de régression linéaire entre deux quantités caractérisant respectivement le volume et le diamètre est la même que celle qui préside aux tarifs en $V = a + bD^2$. Les deux variables « intermédiaires » sont ici log V et log D (1) entre lesquelles on établit une relation linéaire du type :

$\log V = \log A + p \log D$, qui se traduit sur un graphique bilogarithmique par une droite. BERNARD fait très justement remarquer à ce propos que « l'échelle employée... « resserre » les points de la partie droite » du graphique et que donc **l'influence de la dispersion des points correspondant aux gros cubages est diminuée.**

Par analogie avec l'équation $V = a + bD^2$ on voit que l'équation logarithmique du tarif s'écrira, en désignant par $\overline{\log V}$ et $\overline{\log D}$ les moyennes pour l'échantillon :

$$\left(\overline{\log V} = \frac{\sum_i \log V_i}{n}, \quad \overline{\log D} = \frac{\sum_i \log D_i}{n} \right)$$

$$\log V - \overline{\log V} = \frac{\sum_i \log D_i \log V_i - \overline{\log V} \sum_i \log D_i}{\sum_i \log^2 D_i - \overline{\log D} \sum_i \log D_i} (\log D - \overline{\log D}) .$$

(1) Logarithmes usuels de base 10.

Côte-d'Ivoire — Abattage d'un Sipo.

Photo Lepître.

On détermine la formule définitive du tarif, en revenant aux quantités V et D : $V = 10^{\log A} \times D^p = AD^p$ (p étant un entier compris en général entre 2 et 3 (2)).

Les volumes correspondant aux diamètres moyens des classes de diamètre ou de surface terrière s'obtiennent en donnant à D ces valeurs dans la formule $V = AD^p$.

AVANTAGES.

Tout ce qui a été dit relativement à la rigueur de la détermination de la correspondance entre V et D^2 à propos des tarifs en $V = a + bD^2$ peut être répété pour les tarifs en $V = AD^p$ (possibilité de déterminer la valeur de la corrélation, « objectivité » du tarif, calcul possible de la précision du tarif).

Il faut ajouter l'avantage signalé plus haut, relativement au « poids » des gros volumes qui est diminué dans la transformation logarithmique : le meilleur ajustement sur un plus grand intervalle de diamètre le fera préférer, sur le plan théorique, aux tarifs en $V = a + bD^2$.

INCONVÉNIENT.

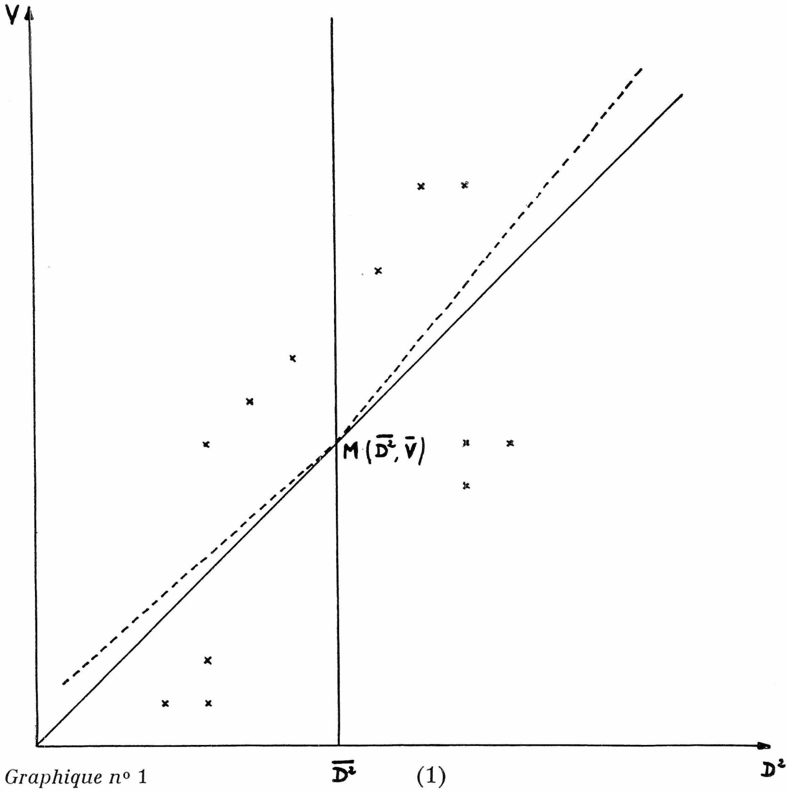
Dans ces tarifs, plus encore que dans les tarifs en $V = a + bD^2$, les calculs peuvent être considérés comme un élément défavorable. Le passage aux logarithmes des quantités D et V et inversement celui des logarithmes aux nombres, pour l'obtention de la formule finale, et le calcul des valeurs de V correspondant aux diamètres moyens D des classes, s'ajoutent en effet au calcul des constantes de la régression de log V en log D : r (coefficient de corrélation) et p (coefficient de régression de log V en log D, égal à la puissance de D dans la formule du tarif).

Malgré un léger avantage théorique sur les tarifs en $V = a + bD^2$, la complication des calculs pourra amener le forestier à leur préférer ces derniers.

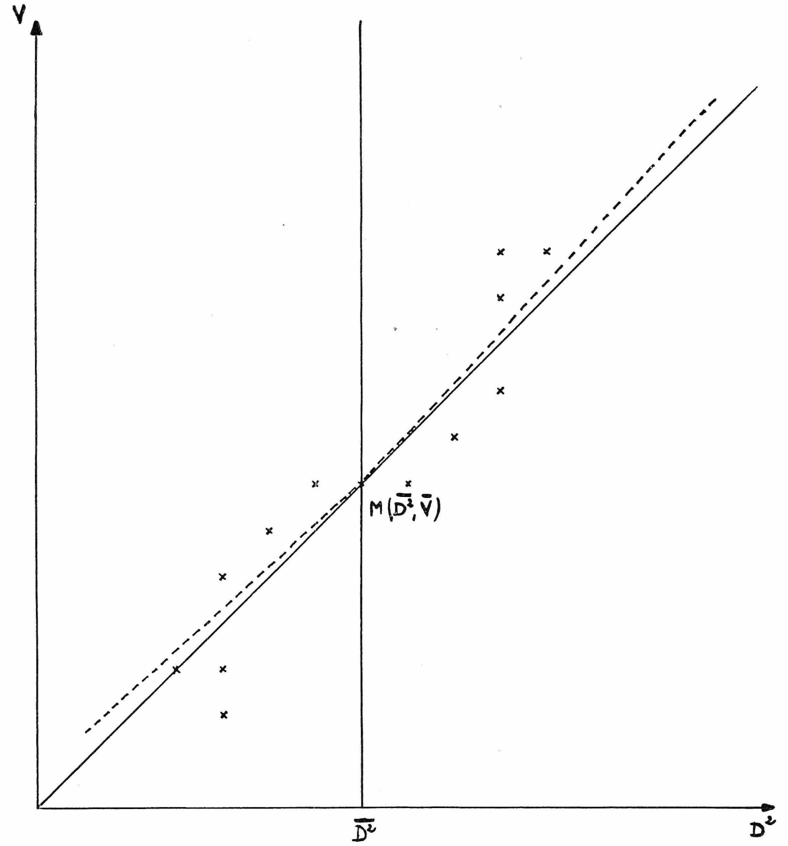
III. — PRÉCISION DES TARIFS DE CUBAGE A UNE ENTRÉE

En supposant le tarif de cubage appliqué au peuplement d'où l'échantillon a été prélevé, et éventuellement à d'autres peuplements (en respectant les conditions évoquées au § I), il reste à déterminer quelle est la précision de chaque type de tarif, ou en termes statistiques, **quelle est, à un seuil de probabilité donné** (qu'on choisit égal à 0,95 en général), **l'erreur à craindre sur le volume d'un arbre ou d'un peuplement, due à la seule application du tarif ;** on suppose qu'il n'y a aucune erreur sur le cubage des arbres de l'échantillon et on fait abstraction des erreurs dues au classement des arbres en catégories de diamètre ou de surface terrière.

(2) On peut, dans le cas d'un tarif « billes utilisables » en particulier, obtenir une valeur de p légèrement inférieure à 2 ; la constante A a nécessairement une dimension puisque l'équation aux « dimensions » est : $L^3 = AL^p$ soit $A = L^{3-p}$.



Graphique n° 1 (1)



Graphique n° 2 (2)

1. — PRÉCISION DES MÉTHODES GRAPHIQUES

Eliminons tout de suite le cas des méthodes purement graphiques ou de Keen et Page. L'absence de tout calcul et la non-détermination exacte des courbes ou droites choisies, interdit toute évaluation de l'erreur. On pourra seulement comparer les nuages de points correspondant à plusieurs tarifs différents et d'après leur étalement autour des courbes choisies, avoir une simple idée de leur précision relative.

Exemple : Les deux droites de Keen et Page des graphiques 1 et 2 indiquent :

— que le tarif de cubage correspondant au peuplement (2) donnera une précision meilleure que le tarif du peuplement (1) sans qu'on puisse chiffrer cette amélioration de la précision.

— et qu'en outre, deux peuplements de variabilité très différente peuvent avoir un même tarif de cubage.

Une estimation grossière de l'erreur, dont le biais n'est pas connu, peut être faite cependant dans le cas des méthodes graphiques, à condition de consentir à quelques calculs. L'erreur sur le volume total **V** des N arbres du peuplement pourra être exprimée au seuil 0,95 (en supposant le taux d'échantillonnage faible) par :

$$e(\mathbf{V}) = \pm 2 \frac{N}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum (V_i - V'_i)^2}{n-1}}$$

V'_i étant le volume correspondant au point d'abscisse x_i de la courbe obtenue (Graphique 3).

2. — PRÉCISION DES TARIFS CALCULÉS

a) Précision du tarif obtenu par le calcul d'un volume moyen par classe de diamètre ou de surface terrière (Cf. II. 2).

C'est le problème de l'estimation de la variance sur la moyenne (volume $\bar{V}$ de l'arbre moyen) dans un sondage stratifié, les strates étant ici les k classes de surface terrière. On sait que l'on a :

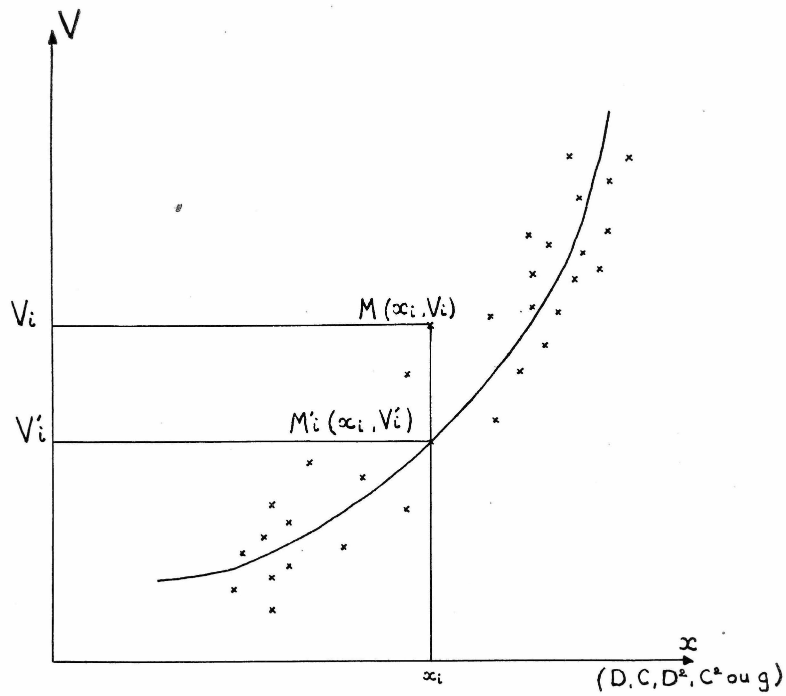
$$\sigma^2(\overline{V}) =$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} \frac{N_h^2}{N^2} \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{\sum_i (V_{ih} - \overline{V}_h)^2}{n_h(n_h - 1)}$$

où N représente l'effectif total du peuplement et N_h celui de chaque strate h, n_h l'effectif de l'échantillon pour les arbres de la classe h, V_{ih} désigne les volumes trouvés pour les arbres de l'échantillon dans la classe h et $\overline{V}_h$ la moyenne de ces volumes.

L'erreur au seuil 0,95 sur le volume moyen, en %, (qui est égale à l'erreur en % sur le volume total du peuplement) est alors :

$$e(\overline{V}) = \pm 2\, \sigma(\overline{V}) \times \frac{100}{\overline{V}} .$$



Graphique n° 3

Exemple :

Supposons que les 77 Sapelli de diamètre supérieur à 80, soient tirés au hasard d'un même peuplement de 924 arbres dont la répartition dans les classes de surfaces terrières conventionnelles est la suivante (tableau 3) :

TABLEAU 3

Classe de surface terrière	Diamètres correspondants	N_h	n_h	n_h/N_h	V_h
3	80-94,5	276	23	1/12	8,6
4	94,5-107,0	156	13	1/12	12,6
5	107,0-118,5	216	18	1/12	15,4
6	118,5-129,0	120	10	1/12	20,1
7	129,0-138,0	60	5	1/12	23,4
8	138,0-147,0	48	4	1/12	23,0
9	> 147,0	48	4	1/12	28,4
		N = 924			

On a :

$$\sigma^2(\overline{V}) = \left[\frac{276^2}{924^2}\left(1 - \frac{1}{12}\right) 0{,}16\right] + \cdots +$$

$$+ \left[\frac{48^2}{924^2}\left(1 - \frac{1}{12}\right) 4{,}15\right]$$

soit :

$$\sigma^2(\overline{V}) = 0{,}0851 \qquad \sigma(\overline{V}) = 0{,}292 \simeq 0{,}30 .$$

D'autre part, on a :

$$\overline{V} = \sum_h \frac{N_h}{N} \overline{V}_h = 15{,}1 \text{ m}^3 .$$

D'où :

$$\overline{V} = 15{,}1 \pm 0{,}6 \text{ m}^3, \text{ au seuil } 0{,}95.$$

Soit une erreur de :

$$\pm \frac{0{,}6 \times 100}{15{,}6} \# 4 \% .$$

Le volume total **V** sera égal à :

$$\mathbf{V} = 924\,(15{,}1 \pm 0{,}6) \text{ m}^3, \text{ au seuil } 0{,}95 .$$

Soit :

$$\mathbf{V} = 13.950 \pm 550 \text{ m}^3, \quad \text{au seuil } 0{,}95 .$$

La théorie des sondages indique que si l'on veut avoir la meilleure précision sur le volume de l'arbre moyen, ce n'est pas un échantillon « représentatif » qu'il faut choisir (comme celui de l'exemple où le taux de sondage est uniforme et égal à 1/12), mais **un échantillon « optimum au sens de Neymann » caractérisé par l'égalité :**

$$\frac{n_h}{N_h\, \sigma_h^2(V)} = C^{ste} \qquad \left(\text{où } \sigma_h^2(V) = \frac{\sum_i (V_{ih} - \overline{V}_h)^2}{n_h - 1}\right)$$

Comme V est en liaison étroite avec D et que les strates sont définies par rapport aux valeurs de D, on démontre que l'égalité précédente peut être approximativement remplacée par :

$$\frac{n_h}{N_h \sum_i V_{hi}} = C^{ste}$$

qui peut s'énoncer de la manière suivante : **on répartit l'échantillon entre les strates, proportionnellement à la somme des volumes dans chaque strate.** On peut estimer celle-ci en appliquant un tarif de cubage grossier aux nombres relatifs des tiges de chaque catégorie de diamètre dans le peuplement. On en déduit des quantités proportionnelles aux quantités $\sum_j V_{hi}$ et on détermine ainsi les taux de sondage dans chaque catégorie.

b) Précisions des tarifs de cubage mathématiques (Cf. II.3).

Cette question a été étudiée par Abadie et Bernard, le premier dans le cas de l'application des tarifs en $V = a + bD^2$ aux parcelles expérimentales (le nombre total N d'arbres est fini), le second dans le cas des tarifs en $V = AD^p$, le nombre total N d'arbres n'étant pas limité.

1) N fini.

Le problème est le suivant : connaissant le nombre exact N d'arbres d'un peuplement bien déterminé et leur répartition suivant les classes de diamètre ou de surface terrière, on tire un échantillon au hasard (donc approximativement « représentatif ») de n arbres de la parcelle qu'on cube et à partir duquel on établit un tarif de cubage mathématique : $V = f(D)$ qui permet de déterminer le volume total **V** des N arbres de la parcelle (ou le volume $\overline{V}$ de l'arbre moyen (1).

On suppose que :

— la fonction $V = f(D)$ est linéaire par rapport aux coefficients constants :

$$f(D) = \sum_k a_k g_k(D).$$

C'est le cas de $V = a + bD^2$,

— la variance de $V - f(D)$ est indépendante de D,

— la variance des coefficients est négligeable,

— l'échantillon est « représentatif » (le taux de sondage $\frac{n_h}{N_h}$ est le même quelle que soit la classe h de diamètre ou de surface terrière).

On estime l'erreur à partir de la variance sur le volume total des n arbres de l'échantillon.

Si l'on désigne par m le nombre de coefficients constants de la formule $V = f(D)$ une estimation de l'erreur à craindre au seuil 0,95 sur le volume total **V** est :

$$e(\mathbf{V}) = \pm \frac{2N}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \sqrt{\frac{\sum_i [V_i - f(D_i)]^2}{n - m}}$$

(1) L'erreur sur l'estimation des volumes provient uniquement du tarif de cubage, les nombres de tiges étant exactement connus. Ce n'est pas le cas d'un inventaire par sondage où ce nombre de tiges est estimé à un intervalle de confiance près.

ou sur le volume $\overline{V}$ de l'arbre moyen :

$$e(\overline{V}) = \pm \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_i [V_i - f(D_i)]^2}{n - m}}$$

Cas de $V = a + bD^2$:

On a $m = 2$ et

$$\sum_i [V_i - f(D_i)]^2 = \sum_i V_i^2 - a \sum_i V_i - b \sum_i V_i D_i^2,$$

d'où :

$$e(\overline{V}) = \pm \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \times s$$

$$\text{avec } s = \sqrt{\frac{\sum_i V_i^2 - a \sum_i V_i - b \sum_i V_i D_i^2}{n - 2}}$$

Cas de $V = AD^p$:

La formule n'est pas linéaire en p, mais sa transformée logarithmique l'est :

$$\log V = \log A + p \log D \quad (m = 2).$$

On aura donc :

$$e(\overline{\log V}) = \pm \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \times s$$

$$\text{avec } s = \sqrt{\frac{\sum_i (\log V_i - \log A - p \log D_i^2)^2}{n - 2}}$$

(au seuil 0,95)

qui s'écrit encore :

$$e(\overline{\log V}) = \pm \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \times$$

$$\sqrt{\frac{\sum_i \log^2 V_i - \log A \sum_i \log V_i - p \sum_i \log V_i \log D_i}{n - 2}}$$

Or on a :

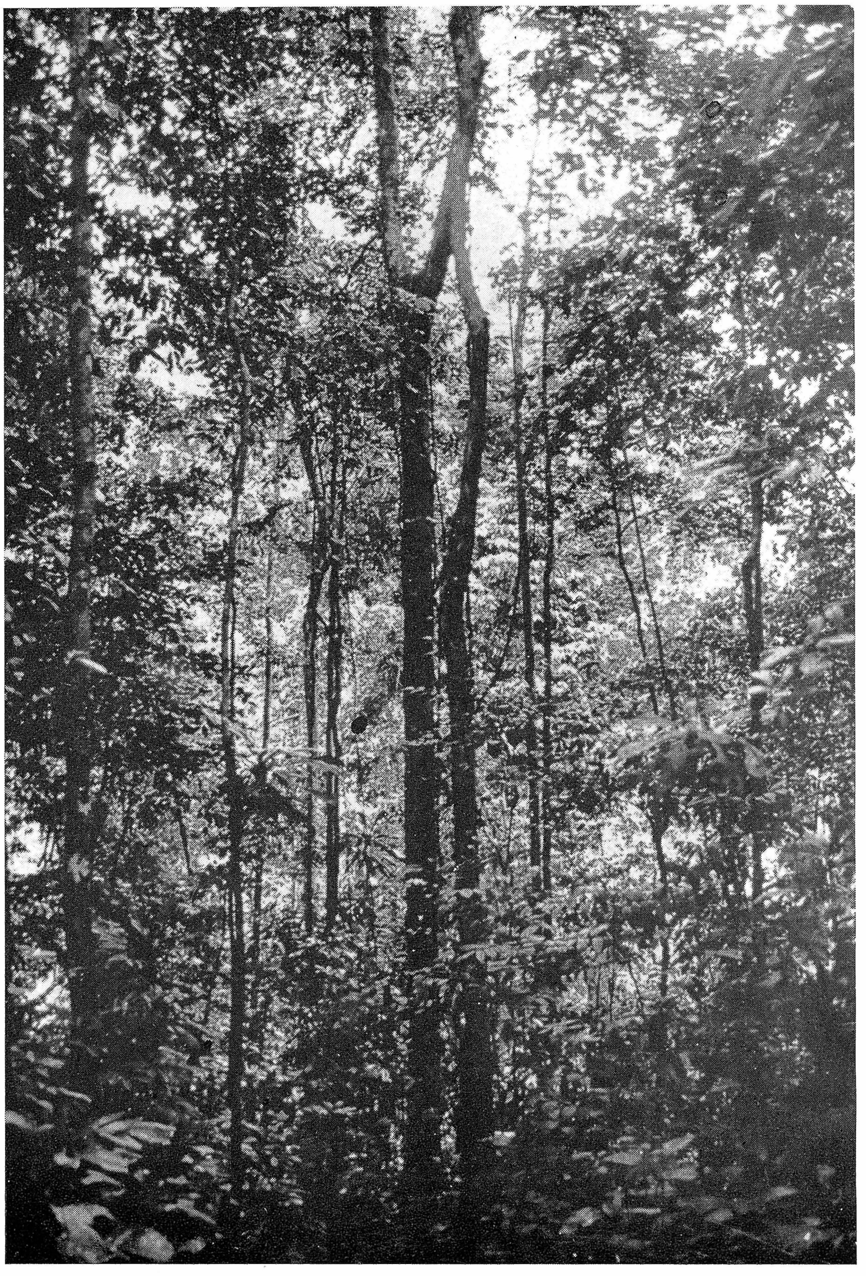
$$\overline{\log V} = \frac{1}{n} \sum_i \log V_i = \log \sqrt[n]{V_1, V_2, \ldots, V_n} = \log \overline{V}'$$

en prenant pour $\overline{V}'$ la moyenne géométrique des n volumes V_i.

On a par suite :

$$\frac{\overline{V}'}{10^{|e|}} < \overline{V} < \overline{V}' \, 10^{|e|} \quad \text{au seuil } 0{,}95 .$$

REMARQUE : Si l'on a déjà calculé le coefficient de corrélation r (voir plus haut) la quantité : $\sum_i [V_i - f(D_i)]^2$ peut être déterminée très simplement.



Gabon — Sous-bois de la forêt dense.

Photo Service de l'Information du Gabon.

On a en effet :

$$\sum_i [V_i - a - bD_i^2] = (1 - r^2) \sum_i (V_i - \overline{V})^2 = (1 - r^2) \left(\sum_i V_i^2 - \overline{V} \sum_i V_i\right).$$

De même pour :

$$\sum_i (\log V_i - \log A - p \log D_i)^2 = (1 - r^2) \left(\sum_i \log^2 V_i - \overline{\log V} \sum_i \log V_i\right)$$

(r étant dans ce dernier cas le coefficient de corrélation entre les variables log V et log D).

Les conditions de validité étant supposées remplies, on voit que l'on peut déterminer simplement la précision du tarif de cubage dans le cas des tarifs en $V = a + bD^2$ utilisés pour l'estimation du volume

— soit d'une parcelle d'expérimentation (plantations en particulier),

— soit d'une partie d'un permis où un inventaire complet a été fait relativement à une essence ou à un groupe d'essences.

Exemple :

Les 77 Sapelli de $D > 80$ dont il a été question plus haut, ont conduit à la formule de tarif suivante : $V\ (m^3) = 0{,}998 + 11{,}360 D^2$: ou sensiblement : $V\ (m^3) = 1 + 11{,}4\ D^2$.

On a :

$$\sqrt{\frac{\sum_i (V_i - a - bD_i)^2}{n - 2}} = 2{,}596 \# 2{,}60\ .$$

Si on applique le tarif aux 924 Sapelli qui sont dans la partie du permis d'où est tiré l'échantillon, on aura sur le volume moyen

$$\overline{V} \left(= \frac{\sum V_i}{n} = 14{,}976\ m^3\right),$$

en %, au seuil 0,95 :

$$e(\overline{V}) = \pm 2 \frac{1}{\sqrt{77}} \frac{100}{14{,}976} \sqrt{1 - \frac{77}{924}} \times 2{,}596 \# \pm 3{,}8\ \%.$$

La méthode d'établissement d'un tarif de cubage par le calcul du volume moyen par classes de surface terrière a donné (cf. plus haut) une erreur de 4 %, donc sensiblement égale.

Détermination de l'effectif n de l'échantillon :

Si on désigne par s la quantité

$$\sqrt{\frac{\sum_i (V_i - a - bD_i)^2}{n - 2}}$$

on a vu que pour le Sapelli $s = 2{,}6$.

En supposant cette quantité indépendante de l'effectif n de l'échantillon, — du moins entre certaines limites de celui-ci — on peut étudier la variation de l'erreur à craindre en % sur le volume de l'arbre moyen $\overline{V}$ (ou ce qui revient au même sur le volume total du peuplement).

On aura en effet :

$$e(\overline{V}) = \pm \frac{200}{\sqrt{n}} \frac{s}{\overline{V}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} = e(n, N, \overline{V})\ .$$

Ce qui intéresse le forestier est le nombre d'arbres n qu'il doit cuber pour établir le tarif de cubage. En élevant au carré et en isolant n on obtient la formule :

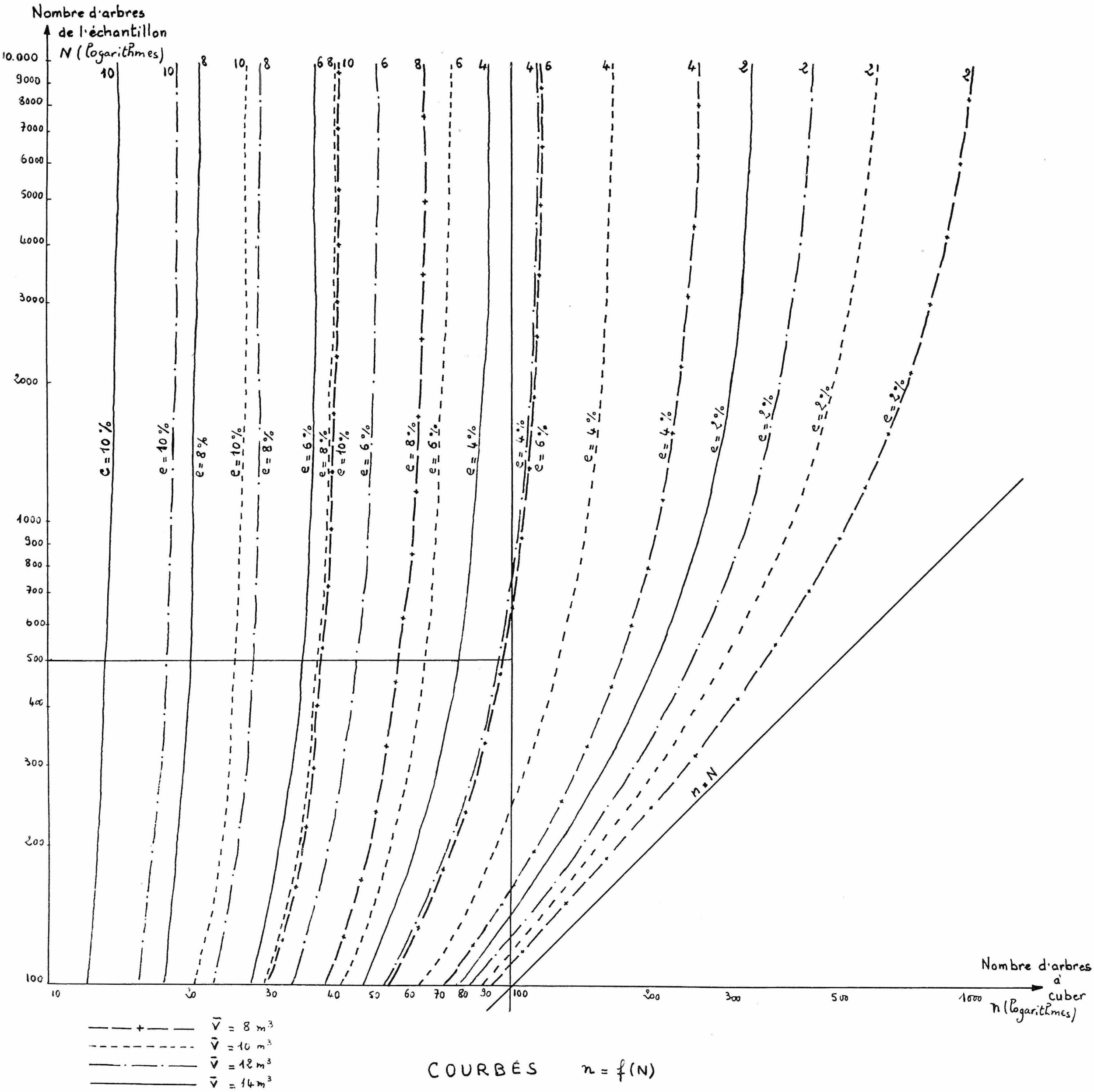
$$n = \frac{N}{1 + N \frac{e^2 \overline{V}^2}{270.000}}.$$

En portant n en abscisses, et N en ordonnées sur un graphique bilogarithmique, on obtient les familles de courbes correspondant aux valeurs des volumes moyens, $\overline{V}$, égales à 8, 10, 12 et 14 m³, pour des erreurs à craindre de 2, 4, 6, 8 et 10 %. On a ainsi un ensemble de $4 \times 5 = 20$ courbes, dont 4 sont confondues 2 à 2 (Graphique 4).

Cet ensemble de courbes permet, connaissant approximativement le nombre total N d'arbres de l'essence considérée dans ce peuplement à cuber, et si l'on a une idée du volume moyen $\overline{V}$ des arbres de cette essence dans cet endroit, de déterminer le nombre n d'arbres qu'il faudra cuber pour avoir l'erreur e au seuil de 0,95.

Exemple :

Sachant que nous avons 500 arbres environ à cuber d'un volume moyen qui peut être évalué



Graphique n° 4

à 14 m³, quel doit être l'effectif de l'échantillon pour avoir une erreur due au tarif de cubage égale à 6 % ou à 4 % (au seuil 0,95) ?

On trace la parallèle à l'axe des n d'ordonnée 500 qui coupe les courbes 6 et 4 de la famille des courbes $\overline{V} = 14$ aux points d'abscisses 36 et 78. Ce sont les effectifs qu'il faudra cuber pour avoir des erreurs sensiblement égales à 6 et 4 %.

En fait la quantité s varie avec n : le but de ces courbes est seulement de montrer dans quelles proportions, approximativement, varient les chiffres n en fonction de l'erreur qu'on accepte à un seuil de probabilité donné.

2° N *très grand* (inventaires par sondages).

C'est le problème étudié par BERNARD, à propos des tarifs de cubage en $V = AD^p$ qu'il a établis au Gabon et dont il a étudié la précision. On peut l'énoncer ainsi : étant donné un échantillon d'arbres, d'une essence ou d'un groupe d'essences, supposé réparti au mieux dans une région donnée, quelle est l'erreur due au tarif de cubage établi à partir de cet échantillon sur le volume d'un arbre ou d'un groupe d'arbres de cette essence pris dans cette région.

Cette erreur est une des composantes de l'erreur finale sur l'estimation des volumes, dont une autre composante est l'erreur sur les nombres d'arbres.

Les conditions relatives à la normalité de la distribution pour l'ensemble des deux variables D^2 et V (ou log D et log V) sont supposées remplies : variance liée de V en D^2, σ^2_{V,D^2}, ou de log V en log D, $\sigma^2_{\log V, \log D}$, constante, quelles que soient les classes de D^2 ou de log D considérées.

Sur le volume d'un arbre, l'erreur sera égale à $\pm 2\, \sigma_{V,D^2}$ dans le cas du tarif en $V = a + bD^2$, à $\pm 2\, \sigma_{\log V, \log D^2}$ sur le logarithme du volume pour le tarif en $V = AD^p$.

L'erreur due à l'application du tarif de cubage $V = a + bD^2$ à un groupe de q arbres sur le volume moyen $\bar{v}$ de ces q arbres sera égale (au seuil 0,95) à :

$$e(\bar{v}) = \pm \frac{2}{\sqrt{q}} \sigma_{V,D^2} = \pm \frac{2}{\sqrt{q}} \underbrace{\sqrt{\frac{\sum_i (V_i - a - bD_i^2)}{n-1}}}_{\sigma_{V,D^2}}$$

(formule du paragraphe précédent dans laquelle on a fait N ∞, d'où $\sqrt{1 - \frac{n}{N}} = 1$, et $n = q$ l'erreur étant estimée non plus sur $\overline{V} = \frac{\sum_i V_i}{n}$ mais sur

$$\overline{V} = \frac{\sum_j V_j}{q}\ )$$

Dans le cas de la formule $V = AD^p$, cette erreur est déterminée sur

$$\overline{\log V} = \log \sqrt[n]{V_1, V_2, ..., V_n}\,,$$

et on passera ensuite comme il a été indiqué plus haut aux quantités volumes.

Exemple : On a appliqué le tarif de cubage obtenu à partir des 77 Sapelli à l'inventaire à 0,2 % d'un bloc forestier dans lequel on suppose l'échantillon régulièrement réparti. On a mesuré le diamètre de 181 Sapelli d'un diamètre supérieur à 60 cm dont on a estimé le volume par le tarif :

$$V = 0{,}998 + 11{,}360\, D^2.$$

La somme des volumes de ces 181 arbres a été trouvée égale à 2.275,6 m³.

On a donc :

$$\overline{V} = \frac{2.275{,}6}{181} = 12{,}57 \text{ m}^3\,.$$

On a vu que l'on avait :

$$\sigma_{V,D^2} \# 2{,}596 \# 2{,}60\,.$$

L'erreur sur le volume moyen $\overline{V}$ due au tarif de cubage est donc égale en %, au seuil 0,95, à :

$$e(\overline{V}) = \pm 2 \frac{100}{\sqrt{181}} \frac{2{,}596}{12{,}57} \# \pm 3{,}1\ \%\,.$$

Cette méthode de l'estimation de l'erreur due au tarif de cubage s'appliquera à tous les inventaires par sondage pour lesquels les nombres de tiges, total ou à l'hectare, sont connus avec une certaine marge d'incertitude.

La suite de cet article sera publiée dans le n° 101 (mai-juin 1965).