

Photo Chatelain - C. T. F. T.

*Division Essais et emplois du bois ; presse Amsler de 30 tonnes.*

# ÉTUDE RHÉOLOGIQUE DES BOIS TROPICAUX <sup>(1)</sup>

## LE MODULE D'ÉLASTICITÉ

par C. SALES,

*Ingénieur de Recherches  
Division Essais et Emplois du Bois  
Centre Technique Forestier Tropical*

### SUMMARY

#### THE RHEOLOGICAL STUDY OF TROPICAL WOODS : MODULUS OF ELASTICITY

*The use of any material, and more particularly the use of wood, is closely linked with its mechanical behaviour. It is therefore necessary to have an exact knowledge of its principal characteristics.*

*These are generally measured in the laboratory on small samples, and the main difficulty lies in the transposition of these*

---

(1) La rhéologie (du grec rheos, courant, et logos, science) est la branche de la physique qui étudie la viscosité,

la plasticité, l'élasticité et l'écoulement de la matière en général.

values to pieces of much larger size. This article is a thorough study of the behaviour of wood under static flexion, a prelude to a more general study of the evolution of characteristics in function of dimensions of pieces.

## RESUMEN

### ESTUDIO REOLOGICO DE LAS MADERAS TROPICALES : EL MODULO DE ELASTICIDAD

*La utilización de los materiales en general, y en particular de la madera, está estrechamente relacionada con su comportamiento mecánico. Por consiguiente, es necesario conocer con toda exactitud los valores que corresponden a sus características principales.*

*En general, tales características son medidas y evaluadas en laboratorio, utilizándose para ello pequeñas probetas. La dificultad principal reside en la transposición de estos valores a piezas de dimensiones mucho más importantes. Este artículo constituye un estudio de cierto alcance respecto al comportamiento de la madera una vez sometida a esfuerzos de flexión y constituye un prelude a un estudio más general, acerca de la evolución de las características en función de las dimensiones de las piezas.*

## INTRODUCTION

L'utilisation des matériaux en général, et plus particulièrement celle du matériau bois, est étroitement liée à son comportement rhéologique. Il est donc nécessaire de connaître avec exactitude les valeurs de ses principales caractéristiques mécaniques.

Celles-ci sont généralement mesurées en laboratoire sur de petites éprouvettes et la difficulté essentielle réside dans la transposition de ces valeurs à des pièces de dimensions beaucoup plus importantes correspondant à celles de l'utilisation.

Dans le cas de matériaux homogènes cette opération ne pose pas, en général, trop de problèmes. Par contre, dans le cas du bois, matériau hétérogène par excellence, l'expérience a toujours montré qu'il était très difficile d'utiliser pour le calcul de certaines pièces les valeurs des caractéristiques mesurées sur des éprouvettes en principe sans défaut et de dimensions très différentes. Enfin, seule l'étude empirique du phénomène effectuée à partir d'expériences pratiques a, à ce jour, permis d'aborder ce problème.

Les premières études entreprises au Centre Technique Forestier Tropical par M. SALLENAVE dans ce domaine se sont limitées à la charge de rupture en flexion statique ; elles ont surtout porté sur les méthodes à utiliser pour calculer à partir des valeurs mesurées en laboratoire sur éprouvettes, des charges de rupture sur des pièces de plus grandes

dimensions. Ainsi MONIN puis SALLENAVE ont montré que la charge unitaire de rupture diminuait pour un même échantillon avec la hauteur fléchie de la pièce soumise à la flexion (propriétés physiques et mécaniques des bois tropicaux — 1<sup>er</sup> supplément).

Nous nous proposons ici de poursuivre l'étude du comportement du matériau bois en flexion statique et en particulier de suivre l'évolution de son module d'élasticité en fonction des dimensions des pièces soumises à l'essai.

En effet, le protocole du laboratoire d'Essais des bois du Centre Technique Forestier Tropical prévoit la mesure du module d'élasticité apparent sur éprouvettes normalisées (Norme NFB 51 008). Cette méthode de mesure avait jusqu'alors donné entière satisfaction. Toutefois, la plupart des normes étrangères, et en particulier les normes internationales ISO, ont prévu de mesurer dorénavant le module d'élasticité en flexion pure ou flexion circulaire. Il nous est alors apparu nécessaire d'entreprendre l'étude du module d'élasticité en flexion pure et de comparer ces résultats à ceux obtenus à partir de la première méthode afin de déterminer, si possible, une relation entre les très nombreux résultats d'essais obtenus à ce jour par notre laboratoire et les organismes étrangers ou même avec nos futurs résultats.

Le problème, en apparence simple, s'est révélé très

complexe par le fait que nous avons dû, pour cette étude, comparer des valeurs qui n'avaient pas été mesurées de la même façon. Aussi a-t-il été nécessaire pour mener à bien notre travail de procéder

par étapes successives. En particulier, il nous a paru nécessaire avant toute chose d'étudier d'une manière très approfondie, le comportement du matériau bois en flexion statique.

## COMPORTEMENT MÉCANIQUE DU BOIS EN FLEXION STATIQUE

### GÉNÉRALITÉS

Le bois change de forme et de volume sous l'influence d'une contrainte appliquée. A température et à humidité constante, la relation qui relie la contrainte à la déformation est linéaire tant que la contrainte appliquée reste au-dessous d'une certaine valeur limite. Les courbes effort-déformation pages 49 et 50, tracées pour une déformation mesurée sur des éprouvettes de 4 essences différentes sollicitées en flexion, confirment cette loi.

Dans ce cas, le matériau obéit alors à la loi de Hook :

$$\sigma = M \cdot \epsilon$$

où  $\sigma$  représente la contrainte appliquée et  $\epsilon$  la déformation relative résultante.

Si le matériau est sollicité en traction ou en compression,  $M$  est alors le module d'élasticité ou module de Young. En théorie, la loi de Hook est valable dans le domaine des faibles déformations correspondant à l'approximation dite « harmonique ».

Nous nous proposons de vérifier par l'expérience le comportement élastique (domaine des faibles déformations) du matériau bois lorsqu'il est soumis à une déformation en flexion.

### MODE OPÉRATOIRE

La méthode que nous avons adoptée pour mener à bien cette étude consiste à mesurer la déformation dans la zone de contrainte maximum d'un certain nombre d'éprouvettes grâce à des jauges de contrainte résistive.

Les jauges utilisées étaient du type :

Dentronics : 208 NYME.

Résistance :  $120 \pm 4 \Omega$ .

Facteur de jauge :  $2,04 \pm 1 \%$ .

FIG. 1.

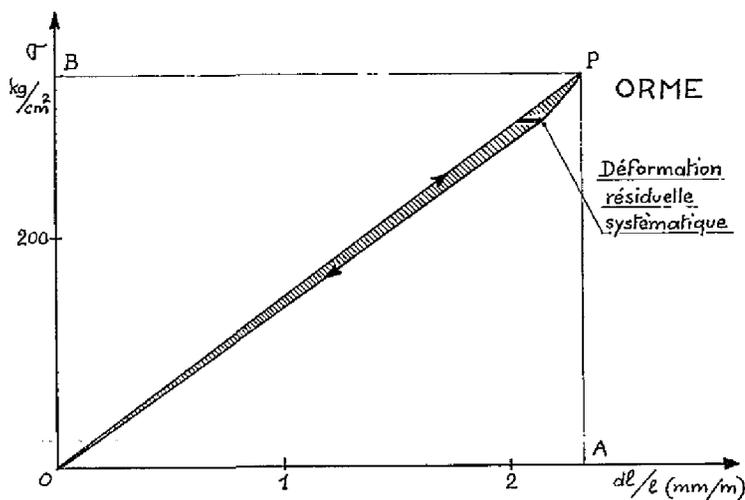
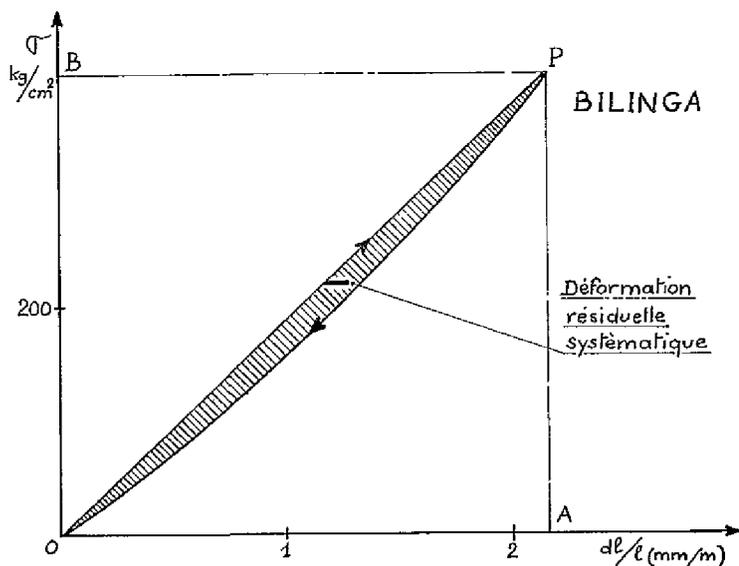


FIG. 2.



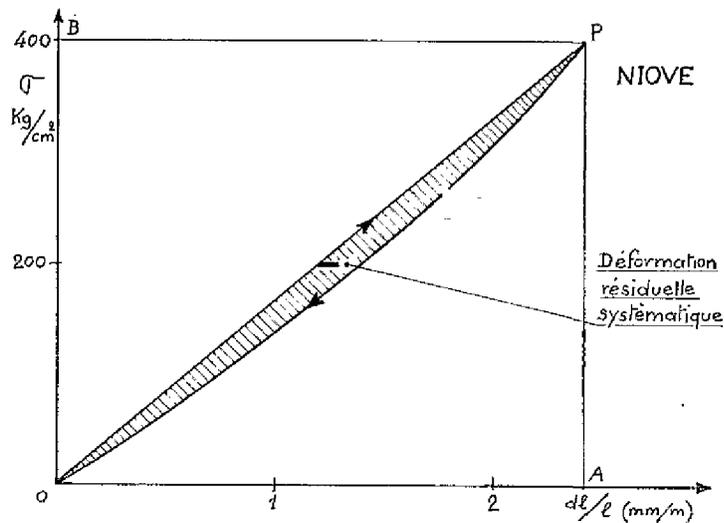


FIG. 3.

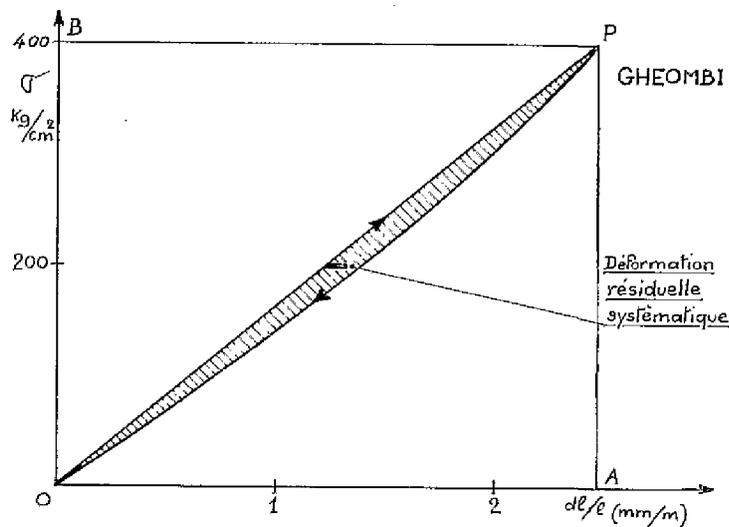
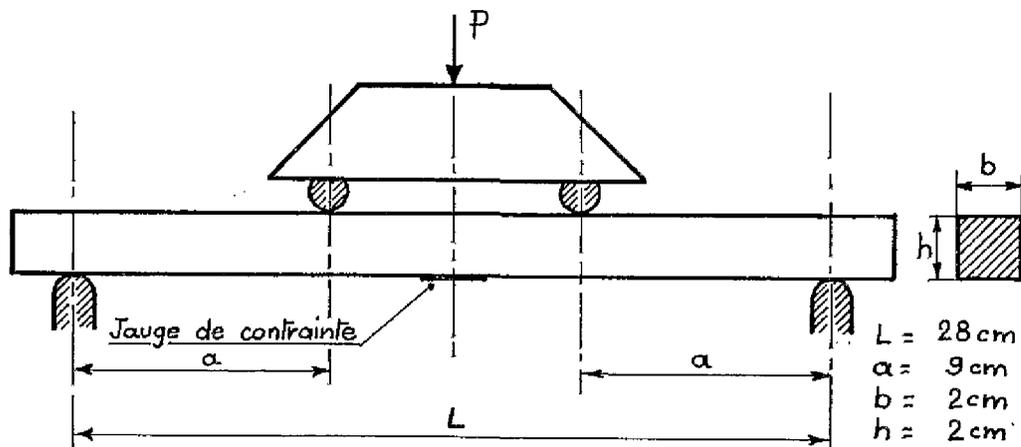


FIG. 4.

FIG. 5.



Ces jauges ont été collées à l'araldite sur la face inférieure de chaque éprouvette dont les dimensions correspondaient à celles des éprouvettes normalisées (NF B 51 008) utilisées pour l'essai de flexion statique.

La mise sous contrainte du bois est réalisée à partir d'une presse (0-10 t) travaillant en flexion selon le schéma de la figure 5.

La jauge de contrainte est disposée selon l'axe longitudinal de l'éprouvette (fig. 6) à distance égale des appuis et des points d'application de la charge. Dans ces conditions, l'éprouvette travaille en flexion pure ou circulaire et l'expression de la contrainte au niveau de la jauge en fonction de la charge appliquée est donnée par la relation :

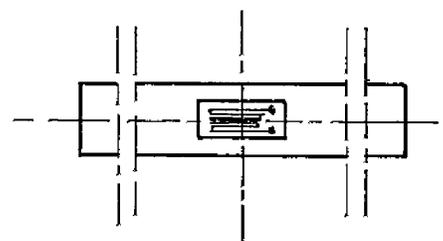
$$\sigma = \frac{My}{I}$$

dans laquelle :

$M$  (Moment fléchissant maximum) =

$$= \frac{P}{2} \times \frac{L}{2} \text{ en kg par cm}$$

FIG. 6.



$$I \text{ (Moment d'inertie)} = \frac{bh^3}{12} \text{ en cm}^4$$

Le détail des calculs permettant d'accéder à cette relation est donné en annexe n° 1. On montre, en particulier, que le plan de déformation associé

à la fibre neutre est situé à la moitié de la hauteur fléchie et que, par là même, la distance ( $y$ ) du point de mesure à la fibre neutre sera, dans notre cas, égale à :

$$\frac{h}{2} = 1 \text{ cm.}$$

## DÉFORMATIONS ÉLASTIQUE ET ANÉLASTIQUE DU MATÉRIAU BOIS

Les déformations sont mesurées grâce à un pont d'extensométrie TELEC du type SD 1 qui donne directement la variation relative de résistance  $\Delta R/R$  de la jauge. La variation dimensionnelle relative de la fibre est alors égale à :

$$\Delta L/L = \Delta R/R \times 1/K$$

selon U. ZELBSTEIN (Technique et utilisation des jauges de contrainte).

Nous avons réalisé des essais sur 4 essences différentes :

Niové — *Staudtia gabonensis* (Gabon).

Gheombi — *Copaifera leteui* (Gabon).

Bilinga — *Nauclea diderrichii* (Côte-d'Ivoire).

Orme — *Ulmus campestris* (France).

Les résultats que nous avons trouvés ont montré que, jusqu'à une certaine valeur de la déformation, le comportement du matériau bois est élastique. C'est-à-dire qu'après suppression de la contrainte appliquée d'une part, il ne subsiste aucune déformation résiduelle et, d'autre part, la courbe étant réversible, le retour à la position 0 se ferait par le même trajet (vitesse de montée en charge = vitesse de descente). En réalité, les courbes ne sont pas totalement réversibles comme le montrent les figures 1, 2, 3 et 4. En effet, la courbe O → P représente une loi de déformation variant de O à A sous l'application d'une contrainte croissant de O à B. L'aire définie par la courbe O → P et les segments PA et OA représente l'énergie fournie au système par la contrainte appliquée. L'aire définie par la courbe O → P et les segments PA et OA correspond à l'énergie élastique restituée ; elle est inférieure à l'énergie fournie. Ce phénomène, anormal par

rapport à la théorie de l'élasticité apparaît comme un phénomène d'ordre secondaire. On le nomme « anélasticité. » et il n'a pas la même origine que l'élasticité. On peut supposer qu'il serait dû à des mouvements réversibles de la structure du bois qui se produiraient avec un certain déphasage par rapport à l'application de la contrainte. Pour le Niové, le Gheombi et le Bilinga l'écart entre l'énergie fournie et l'énergie restituée est significatif. En effet, dans chaque cas, la déformation résiduelle permanente qui subsiste systématiquement et qui peut être attribuée à la dérive propre de l'électronique de mesure, est restée inférieure à 0,1 mm/m (0,01 %). Dans ces conditions, la précision de la mesure est telle, que la différence entre montée en charge et descente, ne peut en aucun cas être attribuée au mode opératoire, mais apparaît bien comme une caractéristique propre du matériau bois. Dans le cas de l'Orme, la différence n'est pas suffisamment significative pour que l'on puisse la prendre en considération.

Il ressort, toutefois, de cette série de mesures que :

1) Le matériau bois est susceptible de se comporter comme un matériau anélastique. Ce phénomène demande naturellement à être étudié de façon plus approfondie. Mais d'une manière générale il semble *a priori*, se manifester d'une manière plus ou moins importante selon les essences étudiées et la charge maximum appliquée.

2) La mise sous contrainte du bois entraîne une déformation linéaire de la fibre dans le domaine des petites déformations, c'est-à-dire tant que l'on reste en dessous d'un seuil que nous nous proposons d'étudier dans le chapitre suivant.

## DÉFORMATION ÉLASTIQUE ET DÉFORMATION LINÉAIRE

Lorsque la déformation devient supérieure à une certaine valeur limite le bois acquiert une déformation irréversible. Il s'agit alors de la déformation plastique. On définit la limite élastique comme la contrainte nécessaire pour provoquer une déformation rémanente ou déformation non réversible après suppression de cette contrainte.

D'une manière générale, on considère que, dans le cas du bois, la zone de déformation élastique est identique à la zone de déformation linéaire. En réalité, l'appréciation de la limite élastique du matériau bois reste tout à fait subjective. En effet, selon que l'on considère comme limite élastique la contrainte nécessaire pour entraîner une déforma-

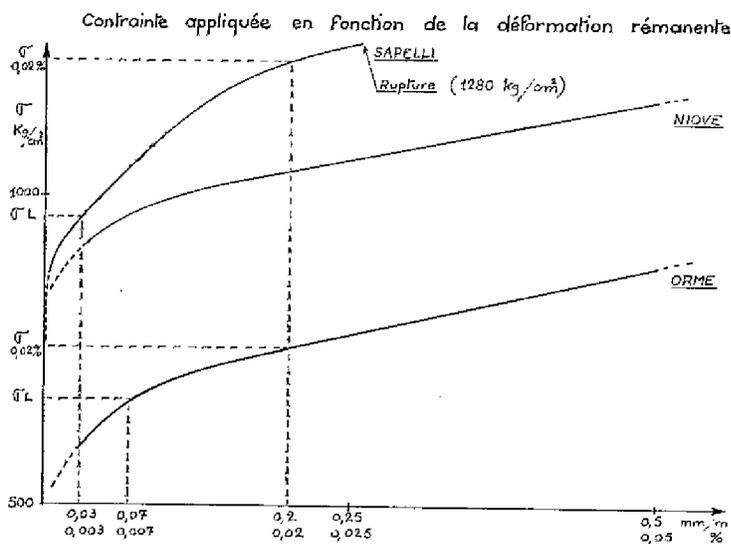


Fig. 7.

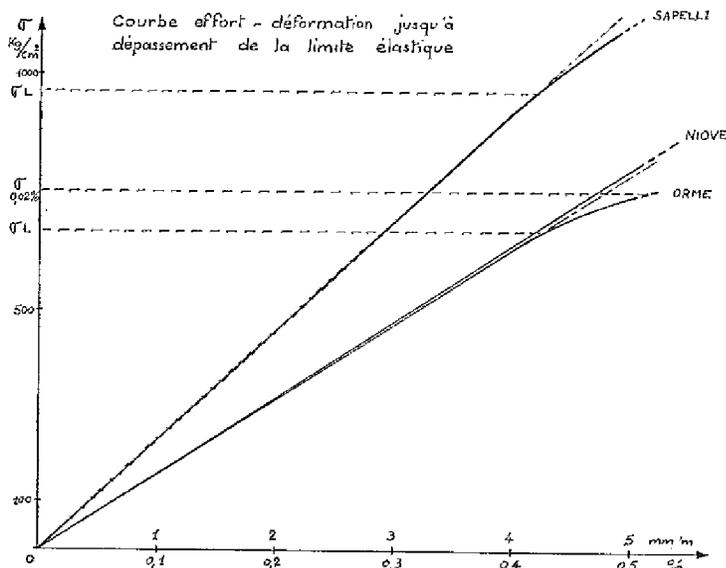


Fig. 8.

tion rémanente de 0,01 %, 0,02 %, 0,2 %, etc... les résultats que l'on obtiendra seront très différents. Les courbes de la figure 7 donnent pour 3 essences (Sapelli — Niové — Orme) la variation de la déformation rémanente en fonction de la contrainte appliquée. Ces graphes ont été obtenus à partir de

nous conserverons comme critère fondamental pour la suite de nos calculs la limite de déformation linéaire, sachant que la contrainte appliquée correspondant à cette limite de déformation linéaire entraîne une très faible déformation rémanente de la fibre inférieure à 0,02 %.

#### ÉTUDE DE LA RELATION ENTRE LIMITE DE DÉFORMATION LINÉAIRE ET CHARGE DE RUPTURE

Cette étude a été réalisée parallèlement sur éprouvettes normalisées de laboratoire et sur poutres

massives de plus grandes dimensions sollicitées en flexion statique. Les éprouvettes normalisées sont

cycles successifs correspondant à l'application d'une contrainte constamment croissante. Dans tous les cas, la déformation rémanente est mesurée 30 s après l'annulation de la charge.

Ainsi il est apparu que, dans le cas de l'Orme, la déformation rémanente variait linéairement dans une certaine limite avec la contrainte maximum appliquée dès que l'on dépasse la limite de linéarité de la courbe effort-déformation (voir fig. 7). Ce phénomène peut également être constaté sur les éprouvettes de Sapelli et de Niové.

Toutefois il est probable qu'au-delà d'une certaine limite, c'est-à-dire au voisinage de la charge de rupture, cette variation n'est plus linéaire comme dans le cas du Sapelli.

En outre, la déformation rémanente varie considérablement selon les essences comme le montrent les courbes (fig. 7).

Enfin, il faut remarquer que, dans le cas du Sapelli, la déformation de la fibre correspondant à la limite de déformation linéaire est égale à celle de l'Orme. Les contraintes ayant entraîné cette déformation sont par contre très différentes (fig. 8).

Il ressort de cette étude portant sur 3 essences que la limite de déformation linéaire prise comme limite de déformation élastique peut correspondre selon les essences à des déformations rémanentes parfois très différentes :

- 0,003 % pour le Sapelli,
- 0,007 % pour l'Orme,
- plus de 0,01 % pour le Niové.

Devant ce fait, étant donné l'impossibilité de fixer un critère d'élasticité utilisable pour tous les bois,

des barreaux de 2 x 2 cm de section carrée et la distance entre appuis est de 28 cm. Les poutres massives mesurent 5 cm de large, 11,4 cm de haut et la distance entre appuis est de 150 cm.

Toutes les charges correspondant aux limites de déformation linéaire ont été mesurées à partir du relevé des courbes effort-déformation des éprouvettes sollicitées en flexion statique selon la technique exposée dans la norme NF B 51 008.

### Essais sur éprouvettes normalisées.

#### ÉTUDE GÉNÉRALE.

Les essais ont été effectués à partir de l'étude du comportement en flexion statique de 100 essences

tropicales de densité et de résistances mécaniques très différentes. L'essence de plus faible densité pour le bois à 12 % d'humidité ( $D_{12}$ ) était le Balsa (*Ochroma lagopus*,  $D_{12} = 0,21$ ) et la plus dense était l'Azobé (*Lophira alata*,  $D_{12} = 1,14$ ).

La liste des essences ainsi que les valeurs numériques mesurées ayant servi à la réalisation de l'étude sont données dans le tableau ci-dessous.

La charge de rupture et la charge correspondant à la limite de déformation linéaire sont calculées pour chaque essence à partir de la moyenne d'une série d'éprouvettes dont le nombre est toujours supérieur ou égal à 10.

Il ressort de ces essais que la corrélation entre charge de rupture et limite de déformation linéaire

LISTE DES ESSENCES PRISES EN COMPTE DANS LE CADRE DE L'ÉTUDE DE LA RELATION ENTRE LIMITE DE DÉFORMATION LINÉAIRE ET CHARGE DE RUPTURE

	Dh	H	P	LE	E (1)
Balsa — <i>Ochroma lagopus</i> .....	0,21	10,1	54	48	35.000
Kapokier — <i>Bombax costatum</i> .....	0,40	10,1	97	83	46.000
Ayous — <i>Triptochiton sclerowylon</i> .....	0,41	9,6	124	114	70.000
Kouali — <i>Vochysia cayennensis</i> .....	0,41	9,3	154	131	84.000
Simarouba — <i>Simarouba amara</i> .....	0,38	11,1	124	93	78.000
Dodomissinga — <i>Parkia nitida</i> .....	0,41	9,0	135	87	88.000
Kouali — <i>Vochysia tomentosa</i> .....	0,44	10,9	164	131	101.000
Ako — <i>Antiaris africana</i> .....	0,47	9,1	137	107	81.000
Acajou — <i>Khaya ivorensis</i> .....	0,49	9,8	167	107	103.000
Kouali — <i>Vochysia speciosa</i> .....	0,49	11,4	145	121	99.000
Tiama — <i>Entandrophragma angolense</i> .....	0,51	14,7	178	133	91.000
Faro — <i>Daniellia thurifera</i> .....	0,53	11,3	165	129	85.000
Onzabilli — <i>Antrocaryon klaineianum</i> .....	0,56	10,8	155	134	118.000
Ossabel — <i>Daeryodes normandii</i> .....	0,57	9,5	241	157	125.000
Nzobeu — <i>Brachystegia laurentii</i> .....	0,59	9,7	209	162	110.000
Nemba — <i>Holoptelea grandis</i> .....	0,64	12,0	203	179	105.000
Sipo — <i>Entandrophragma utile</i> .....	0,64	11,9	226	179	105.000
Ekop évène — <i>Brachystegia mildbraedii</i> .....	0,63	11,5	200	137	107.000
Lohonté — <i>Celtis adolfi-ferdierii</i> .....	0,66	10,7	222	189	130.000
Enouk — <i>Detarium macrocarpum</i> .....	0,67	12,4	192	160	109.000
Sapelli — <i>Entandrophragma cylindricum</i> .....	0,68	9,7	223	164	129.000
Izombé — <i>Testulea gabonensis</i> .....	0,69	12,6	195	173	101.000
Douka — <i>Tieghemella africana</i> .....	0,71	11,5	284	233	137.000
Teck — <i>Tectona grandis</i> .....	0,70	8,2	243	175	136.000
Okala — <i>Xylopia aethiopica</i> .....	0,71	9,5	303	224	176.000
Akossika — <i>Scottelia chevalieri</i> .....	0,71	11,2	216	150	110.000
Engo — <i>Celtis tessmannii</i> .....	0,74	10,0	287	223	163.000
Angélique — <i>Dicorynia guianensis</i> .....	0,74	11,0	277	222	157.000
Movingui — <i>Distemonanthus benthamianus</i> .....	0,75	9,5	294	221	148.000
Ba — <i>Celtis mildbraedii</i> .....	0,75	12,8	279	230	135.000
Limbali — <i>Gilbertiodendron preussii</i> .....	0,80	11,4	305	253	138.000
Lompo — <i>Pseudocedrela kotschii</i> .....	0,82	15,4	219	173	113.000
Abeum — <i>Gilbertiodendron dewevrei</i> .....	0,83	13,0	277	206	167.000
N'Dong eli — <i>Xylopia hypolampra</i> .....	0,83	12,5	270	258	181.000
Amaranto — <i>Peltogyne venosa</i> .....	0,83	10,5	316	263	168.000
Kotibé — <i>Nesogordonia papaverifera</i> .....	0,84	12,7	308	221	130.000
Moabi — <i>Baillonella toxisperma</i> .....	0,87	11,4	332	237	192.000
Courbaril — <i>Hymenaea courbaril</i> .....	0,89	10,4	290	235	149.000
Ansan — <i>Celtis zenkeri</i> .....	0,90	10,7	272	250	154.000
Niové — <i>Staudtia stipitata</i> .....	0,90	11,5	340	265	161.000
Tali — <i>Erythrophloeum ivorense</i> .....	0,91	8,0	311	273	186.000
Ehii — <i>Bulkyospermum parkii</i> .....	0,93	11,9	235	161	111.000
Soun-Soun — <i>Diospyros mespiliiformis</i> .....	0,93	12,6	308	165	185.000
Cœur dehors — <i>Diplotropis purpurea</i> .....	0,98	11,2	370	275	210.000
Omang — <i>Desbordestia glaucescens</i> .....	1,03	11,9	301	267	163.000
Mahot noir — <i>Eschweilera odora</i> .....	1,04	11,2	348	258	208.000
Balata franc — <i>Manilkara bidentata</i> .....	1,09	11,1	341	258	192.000
Bois gris — <i>Licania ternatensis</i> .....	1,10	10,3	461	315	242.000
Bois rouge — <i>Amanoa caribaea</i> .....	1,11	9,4	365	278	210.000
Azobé — <i>Lophira alata</i> .....	1,14	12,6	444	347	224.000

(1) Dh = densité du bois à l'humidité H.  
H = humidité du bois (%).  
P = charge de rupture (kg).

LE = limite de déformation linéaire (kg).  
E = module d'élasticité apparent (kg par cm<sup>2</sup>).

LISTE COMPLÉMENTAIRE

	P	LE	E
Sanan — <i>Daniellia oliveri</i> .....	139	93	64.000
Pin — <i>Pinus patula</i> .....	122	90	69.000
Bahia — <i>Mitragyna ciliata</i> .....	148	121	72.000
Cerisier — <i>Elaeocarpus persicaefolius</i> .....	171	151	77.000
Atieghe — <i>Discoglyprena caloneura</i> .....	131	103	76.000
Afo — <i>Poga oleosa</i> .....	168	151	87.000
Houp — <i>Montrouziera caulliflora</i> .....	192	147	90.000
Copaia — <i>Jacaranda copaia</i> .....	146	112	93.000
Nieuk — <i>Fillaeopsis discophora</i> .....	177	133	95.000
Framiré — <i>Terminalia ivorensis</i> .....	172	124	97.000
Mapa — <i>Couma guianensis</i> .....	167	141	99.000
Agba-Emolo — <i>Gossweilerodendron balsamiferum</i> .....	186	125	102.000
Koanandio — <i>Gambeya gigantea</i> .....	181	151	102.000
Sogho — <i>Seyrhocephalum ochocoa</i> .....	182	151	109.000
Kouatakama — <i>Parkia pendula</i> .....	190	160	106.000
Grignon franc — <i>Ocotea rubra</i> .....	200	161	112.000
Abarco — <i>Cariniana pyriformis</i> .....	232	168	114.000
Parkia — <i>Parkia bicolor</i> .....	197	159	114.000
Gommier — <i>Dacryodes excelsa</i> .....	244	157	117.000
Andoung Morel — <i>Monopetalanthus coriaceus</i> .....	257	203	118.000
Andoung Durand — <i>Monopetalanthus durandii</i> .....	250	191	128.000
Andoung 66 — <i>Tetraberlinia polyphylla</i> .....	268	202	120.000
Kohu — <i>Intsia bijuga</i> .....	232	216	120.000
Aleoueko — <i>Dimorphandra hokenkerkii</i> .....	243	178	124.000
Lacassi — <i>Caratpa densifolia</i> .....	207	164	125.000
Goni — <i>Pterocarpus erinaceus</i> .....	310	237	127.000
Gongolo — <i>Qualea albiflora</i> .....	230	187	132.000
Carapa — <i>Carapa procera</i> .....	264	200	136.000
Dabema — <i>Piptadeniastrum africanum</i> .....	245	196	137.000
Goupi — <i>Goupi glabra</i> .....	304	275	139.000
Manli — <i>Symphonia globulifera</i> .....	270	217	138.000
Eucalyptus — <i>Eucalyptus saligna</i> .....	222	171	140.000
Mukulungu — <i>Austranella congolensis</i> .....	254	248	143.000
Awoura — <i>Paraberlinia bifoliolata</i> .....	299	244	145.000
M'Bebame — <i>Gambeya africana</i> .....	270	236	149.000
Lotofa — <i>Stereulia rhinopetala</i> .....	275	196	152.000
Maguinza — <i>Manilkara maboensis</i> .....	328	259	154.000
Balata pomme — <i>Ragala sanguinolenta</i> .....	249	192	155.000
Jaboty — <i>Erisma uncinatum</i> .....	175	148	157.000
Wapa — <i>Eperua falcata</i> .....	261	216	161.000
Alimiao — <i>Newtonia suaveolens</i> .....	288	268	163.000
Tavolo — <i>Cryptocarya thouvenotii</i> .....	277	209	164.000
Wacapou — <i>Vouacapoua americana</i> .....	364	276	166.000
Acacia franc — <i>Erioterobium schomburgkii</i> .....	325	243	168.000
Odzikouna — <i>Seytopetalum klaineum</i> .....	320	246	169.000
Anangossi — <i>Terminalia guianensis</i> .....	360	308	177.000
Sapupira — <i>Recordoxyton amazonicum</i> .....	330	312	180.000
Pracuba — <i>Mora paraensis</i> .....	351	291	181.000
Eucalyptus — <i>Eucalyptus globulus</i> .....	311	228	190.000
Parcouri — <i>Platonia insignis</i> .....	391	314	200.000
Nato hofotra — <i>Felidia clusioides</i> .....	402	267	212.000

est excellente. La régression linéaire effectuée sur ces 2 caractéristiques présente un coefficient de corrélation de 0,95. On peut donc affirmer à l'issue des essais effectués sur 100 essences différentes de bois tropicaux que la charge correspondant à la limite de déformation linéaire variait linéairement en fonction de la charge de rupture comme nous le montre la figure 9.

L'équation de la droite de corrélation calculée à l'ordinateur est :

$$LDL = 0,76 R + 7$$

LDL : limite de déformation linéaire,

R : charge de rupture.

Le coefficient 7 est négligeable à côté de 0,76 R

et dans ces conditions l'équation de la droite de corrélation est bien de la forme  $y = ax$ .

La moyenne des rapports LDL/R de chaque essence est ainsi égale à 0,76. L'intervalle de confiance à 99 % de cette moyenne est de 2 %.

Il ressort donc de cette étude que, d'une manière générale, la contrainte appliquée correspondant à la limite de déformation linéaire est approximativement égale aux 3/4 de la contrainte de rupture.

ÉTUDE SUR UNE ESSENCE.

A partir du comportement général du bois tel que nous venons de le définir, nous nous proposons d'étudier ici le comportement particulier d'une seule essence. Nous avons choisi pour cela le Fraké car

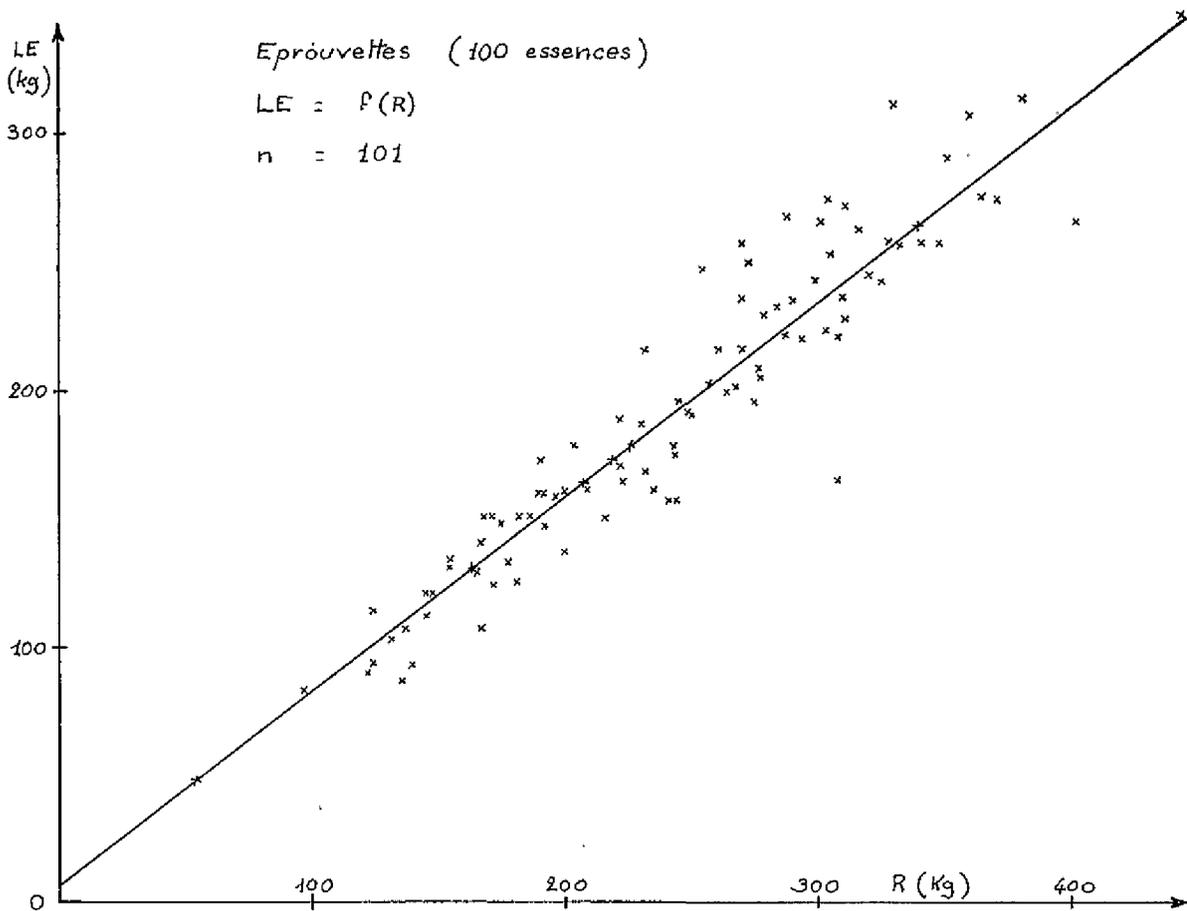


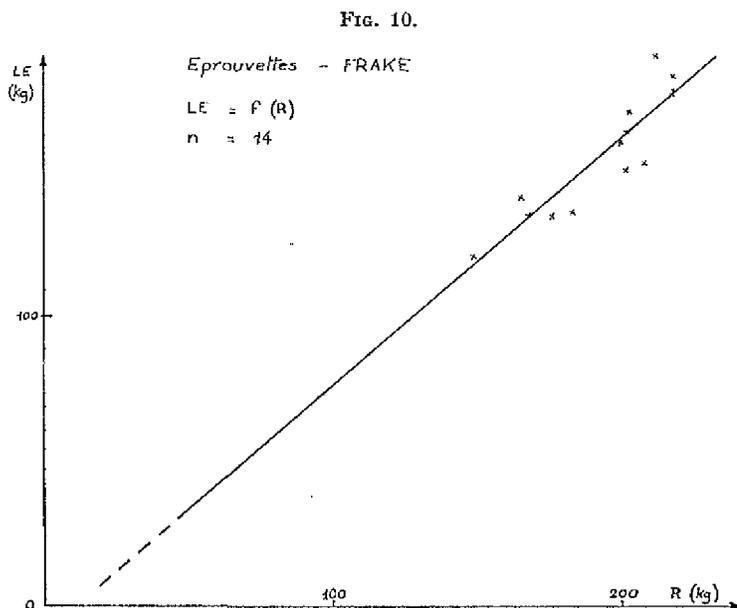
FIG. 9.

nous disposions d'un nombre d'essais suffisant sur cette espèce. Le même protocole est utilisé pour les essais sur poutres.

Nous disposons pour cette étude de 14 essais correspondant chacun à 10 épreuves (soit un total de 140 valeurs) répartis de la manière suivante

- 12 essais sur Fraké blanc,
- 2 essais sur Fraké bariolé ou noir.

D'une manière générale la corrélation est moins bonne dans le cas du Fraké que dans le cas général comme le montre le graphique (fig. 10). Cela est dû, d'une part à la grande variabilité de l'espèce, et d'autre part au nombre de données dont nous disposons et qui est très nettement inférieur à celui de l'étude générale.



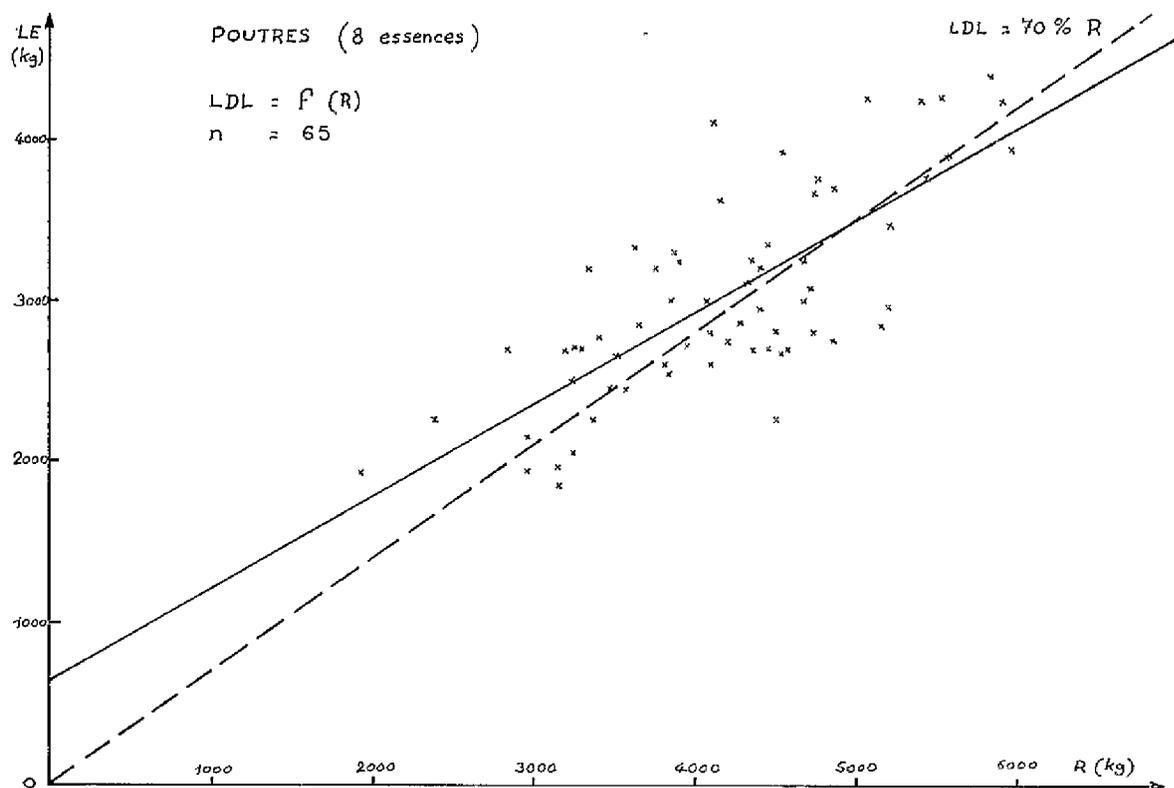


Fig. 11.

Toutefois, le coefficient de corrélation est néanmoins égal à 0,90 et il passe à 0,92 si l'on exclut des calculs les résultats correspondant au Fraké noir.

Les droites de régression de  $LDL$  en fonction de  $R$  sont dans ce cas de la forme  $y = ax + b$ . Le coefficient  $b$  étant en moyenne égal à 5 % de la moyenne des charges de rupture. Il n'est donc pas négligeable et si la droite de régression s'écrit :

$$LDL = 0,86 R - 10$$

la moyenne des rapports  $LDL/R$  calculés séparément est égale à 81 %, ce qui correspond toutefois à la valeur générale calculée dans le paragraphe précédent si l'on tient compte de l'intervalle de confiance de  $\pm 2$  %.

D'une manière générale la contrainte correspondant à la limite de déformation linéaire est approximativement égale aux  $3/4$  de la contrainte de rupture. En réalité, l'expérience montre que l'on se situe légèrement au-dessus de cette valeur. En outre, elle montre aussi que selon les essences on peut plus ou moins s'écarter de cette valeur moyenne mais même dans un des cas assez défavorables, tel que celui du Fraké, les valeurs calculées restent relativement voisines de la valeur générale.

## Essais sur poutres.

### ETUDE GÉNÉRALE.

Les essais ont été effectués à partir de l'étude du comportement en flexion statique de poutres provenant de 8 essences tropicales correspondant à 65 essais différents. Ces essences sont les suivantes :

- Movingui — *Distemonanthus benthamianus*
- Akossika — *Scottelia* sp.
- Angélique — *Dicorynia guianensis*
- Evene — *Brachystegia mildbraedii*
- Iroko — *Chlorophora excelsa*
- Fraké — *Terminalia superba*
- Ba — *Celtis mildbraedii*
- Lohonfe — *Celtis adolfi — friderici*.

La charge correspondant à la limite de déformation linéaire varie linéairement avec la charge de rupture comme le montre la figure 11. Toutefois, la régression obtenue entre ces deux caractéristiques est moins bonne que sur éprouvettes. En effet, le coefficient de corrélation n'est plus dans ce cas égal qu'à 0,76.

En outre, l'équation de la droite de régression :  $LDL = 0,57 R + 650$  de la forme  $y = ax + b$  fait

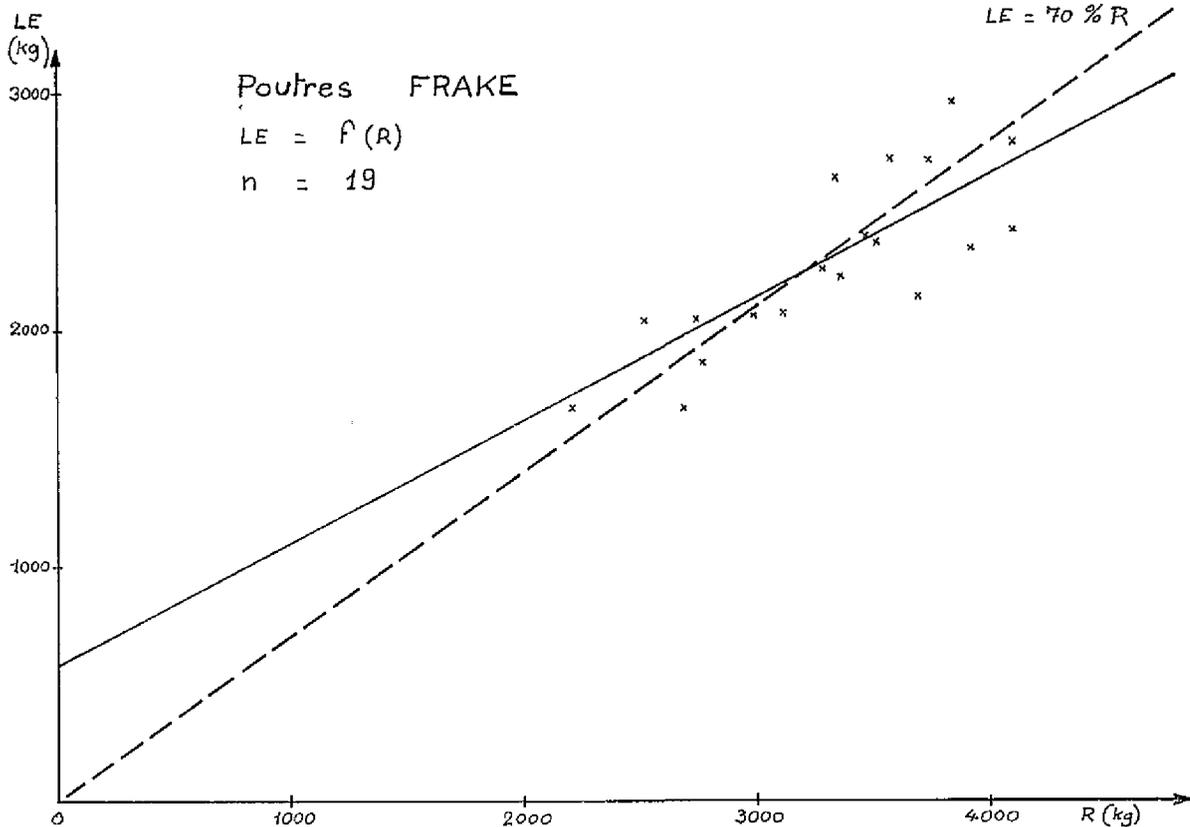


FIG. 12.

apparaître un coefficient  $b$  non négligeable qui n'a, toutefois, *a priori*, aucune signification physique.

Ces anomalies peuvent être attribuées en partie à la présence inévitable de défauts (nœuds — fentes internes — altérations biologiques) toujours présents sur des pièces de telles dimensions. Ces défauts rendent les résultats plus hétérogènes que ceux mesurés sur des éprouvettes sans défaut.

Toutefois, il est intéressant de remarquer que la moyenne des rapports  $LDL/R$  est égale à 70 % ce qui est plus faible mais relativement voisin en première approximation de la valeur moyenne mesurée sur éprouvettes.

Il semble donc que du point de vue de la relation existant entre charge de rupture et limite de déformation linéaire le comportement du bois ne dépende que très peu des dimensions des pièces sollicitées. Seule la présence des défauts qui croît avec l'importance de la pièce peut entraîner des résultats relativement différents qui sont à l'origine de la plus grande dispersion rencontrée sur les essais sur poutres.

#### ÉTUDE SUR UNE ESSENCE.

Des essais effectués sur une seule essence, le Fraké, de diverses provenances montrent que celle-ci se

comporte en moyenne de la même manière que l'ensemble des 8 essences prises globalement (fig. 12). En effet, le coefficient de corrélation reste assez faible 0,77 et l'équation de la droite de corrélation devient :

$$LDL \times 0,52 R + 580 .$$

En outre, la moyenne des rapports  $LDL/R$  reste égale à 70 %.

Cependant, la présence du Fraké de diverses provenances contribue d'une manière non négligeable à l'hétérogénéité des résultats. La séparation des résultats en fonction des provenances augmente les valeurs des coefficients de corrélation :

#### Côte-d'Ivoire :

$$LDL = 0,56 R + 390$$

Coefficient de corrélation : 0,85 .

#### Congo.

$$LDL = 0,53 R + 530$$

Coefficient de corrélation : 0,78 .

La moyenne des rapports  $LDL/R$  reste égale à 70 % et la différence de provenance ne semble pas avoir d'influence sur ce facteur.

Il ressort donc des essais effectués, tant sur éprouvettes que sur poutres de plus grandes dimensions, qu'il existe une étroite corrélation entre charge de rupture et limite de déformation linéaire lorsqu'on soumet le bois à un essai de flexion statique.

Toutefois, les rapports  $LDL/R$  mesurés sur poutres sont généralement plus faibles que sur éprouvettes ce qui montre l'importance des défauts intrinsèques au bois qui semblent plus particulièrement affecter la limite de déformation linéaire.

Enfin, et d'une façon générale, la contrainte correspondant à la limite de déformation linéaire est égale en moyenne, pour des éprouvettes sans défaut, à 75 % de la contrainte de rupture. Par contre, les essais effectués sur poutres, d'assez grandes dimensions et non exemptes de défauts, montrent que la limite de déformation linéaire n'est plus égale qu'à 70 % environ de la contrainte de rupture. Toutefois, il n'est pas possible dans l'état actuel de nos travaux de conclure d'une manière définitive sur les phénomènes susceptibles d'être à l'origine de la différence constatée mais il semble bien que la présence ou l'absence de défauts soit l'un des facteurs essentiels.

## ÉTUDE COMPARATIVE : MODULE D'ÉLASTICITÉ EN FLEXION PURE MODULE D'ÉLASTICITÉ EN FLEXION APPARENTE

### MODE OPÉRATOIRE

Le module d'élasticité en flexion pure et le module d'élasticité apparent sont mesurés sur la même éprouvette en raison de l'hétérogénéité naturelle du matériau bois. En effet celle-ci peut souvent entraîner des variations de résistances mécaniques, parfois importantes, entre éprouvettes provenant du même arbre.

La méthode utilisée pour cette étude n'a pas été celle présentée dans le protocole d'essai puisqu'il s'agit d'une méthode destructive. Les essais ont été réalisés sur trois essences d'Afrique tropicale :

Bilinga — *Nauclea diderrichii* (Provenance Côte-d'Ivoire)

Gheombi — *Copaifera letestui* (Provenance Gabon)

Sapelli — *Entandrophragma cylindricum* (Provenance E. C. A.).

Les éprouvettes, préalablement séchées à une

humidité voisine de 12 %, sont stabilisées en salle climatisée ( $T = 22\text{ °C}$  —  $E_h = 60\%$ ) pendant une durée minimum d'un mois.

L'essai est alors effectué sur la presse 0-10 T du laboratoire de la division qui est équipée du dispositif permettant de travailler en flexion statique. On procède pour chaque éprouvette à une montée et une descente en charge progressive. Les charges appliquées sont lues sur le cadran de la machine avec une précision de  $\pm 1$  kg et les flèches sont mesurées à partir de comparateurs gradués au 1/100 de mm.

La première partie de notre étude ayant montré que la limite de variation linéaire était en moyenne à 75 % de la charge de rupture, on prend pour valeur maximum d'essai la moitié de la charge de rupture la plus faible, relevée sur chacune des essences à étudier ; on est ainsi assuré de ne dépasser en aucun cas la limite de variation linéaire de la déformation de la contrainte.

### MESURE DES MODULES D'ÉLASTICITÉ

#### Module d'élasticité apparent.

La charge est concentrée en un point d'application situé au milieu de la distance entre appuis comme l'indique la figure 13.

Les comparateurs 1 et 2 mesurent la déformation sur appui, le comparateur 3 la flèche au point d'application de la charge.

Dans ces conditions, le module d'élasticité apparent calculé à partir des relations classiques de la

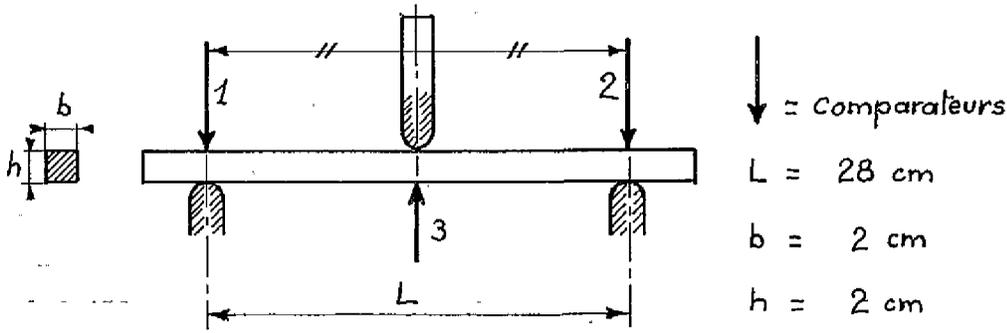


FIG. 13.

résistance des matériaux est donné par la relation suivante :

$$E \text{ (kg/cm}^2\text{)} \times \frac{PL^3}{48 If} \quad (I)$$

avec :

- $P \text{ (kg)}$  = charge appliquée
- $L \text{ (cm)}$  = distance entre appuis
- $I \text{ (cm}^4\text{)}$  =  $bh^3/12$  (moment d'inertie)
- $f \text{ (cm)}$  = flèche présentée par l'éprouvette et correspondant à l'application d'une charge  $P$ .

En effectuant les calculs, la relation  $I$  devient

$$E \times 343 \frac{P}{f}. \quad (I \text{ bis})$$

Le détail des calculs est exposé en annexe 1.

Pour chaque éprouvette on procède par palier de 10 kg en 10 kg, et pour chacun d'eux on note la charge et la flèche résultante.

**Module d'élasticité en flexion pure.**

La charge est appliquée en deux points situés à égale distance des appuis comme le montre la figure 14.

Les comparateurs 1 et 2 mesurent la flèche à

l'aplomb des points d'application de la charge. Le comparateur 3 mesure la flèche dans le plan de déformation maximum situé au milieu de la distance entre appuis

Dans ces conditions, le module d'élasticité en flexion pure ou flexion circulaire est donné par la relation suivante :

$$E \text{ (kg/cm}^2\text{)} = \frac{a}{4 I} \left( a^2 - La + \frac{L^2}{4} \right) \frac{P}{f} \quad (II)$$

- $P \text{ (kg)}$  = charge appliquée par le piston de la machine
- $L \text{ (cm)}$  = distance entre appuis
- $I \text{ (cm}^4\text{)}$  = moment d'inertie =  $bh^3/12$
- $a \text{ (cm)}$  = distance du point d'application de la charge à l'appui le plus proche
- $f \text{ (cm)}$  = flèche en flexion pure =  $af - \frac{f_1 + f_2}{2}$ .

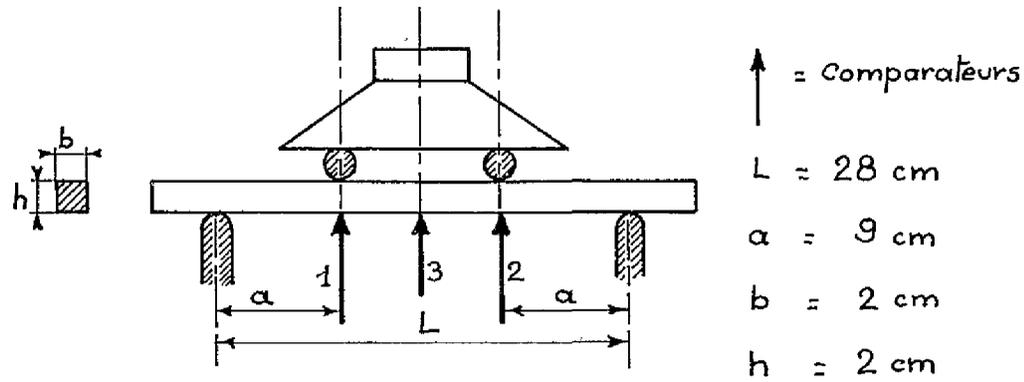
En effectuant les calculs la relation II devient :

$$E = 42,2 \frac{P}{f}. \quad (II \text{ bis})$$

Le détail des calculs est exposé en annexe 2.

Comme pour la mesure du module d'élasticité apparent, on procède pour chaque éprouvette par palier de 10 en 10 kg et pour chacun d'eux on mesure la charge et les flèches correspondantes.

FIG. 14.



## RÉSULTATS

Essence	Flexion circulaire pure		Flexion apparente		Rapport des modules d'élasticité
	Moyenne kg/cm <sup>2</sup>	Intervalle de confiance kg/cm <sup>2</sup>	Moyenne kg/cm <sup>2</sup>	Intervalle de confiance kg/cm <sup>2</sup>	
Bilinga .....	173.600	5.400	127.900	1.900	74 %
Ghéombi .....	204.200	1.400	133.100	1.600	65 %
Sapelli .....	193.100	12.000	123.500	3.700	64 %

Les essais ont porté pour chaque essence sur 5 éprouvettes. Les modules d'élasticité moyens sont rassemblés dans le tableau ci-dessus. Ils sont accompagnés de l'intervalle de confiance de la moyenne calculé au seuil de fiabilité de 95 %.

Les résultats font donc apparaître une différence très nette entre les modules d'élasticité mesurés sur une même éprouvette en fonction des techniques de mesure utilisées.

Les origines et les causes de ce phénomène sont dans l'état actuel des choses difficiles à apprécier. Toutefois, il est certain que la technique de mesure du module d'élasticité en flexion pure est bien celle qui donne les résultats les plus exacts. En effet, les mesures effectuées dans ce cas n'intéressent qu'une partie de l'éprouvette dont on connaît bien le comportement et dont on peut calculer rigoureusement l'équation de la déformée. En outre, on se rapproche par ce système des conditions de flexion en charge répartie et l'on supprime toutes les perturbations qui peuvent être induites par une applica-

tion des charges concentrées qui tend à déformer très localement la structure intime du bois.

Enfin, on s'affranchit par la mesure du module d'élasticité en flexion pure de tous les phénomènes de déformation sur appui qui perturbent considérablement la mesure du module d'élasticité apparent.

Ces essais montrent donc l'intérêt de s'orienter chaque fois que cela est possible vers la mesure d'un module d'élasticité en flexion circulaire qui donne une valeur plus exacte des possibilités mécaniques du bois à étudier. Toutefois, la question reste posée de déterminer s'il existe, d'une manière générale, une relation entre les valeurs du module trouvées par les deux méthodes : en effet, le module d'élasticité apparent est égal à environ 65 % de celui mesuré en flexion pure pour le bois de Ghéombi et de Sapelli, et à 75 % pour le bois de Bilinga. Des mesures, portant sur un plus grand nombre d'espèces et d'essais, permettraient d'apporter des précisions sur ce point. Cette étude sera donc poursuivie et inscrite au programme de recherche de la division.

## CONCLUSION

Les résultats de cette première étude sur le comportement mécanique du bois en flexion permettent de formuler les conclusions suivantes :

— les déformations rémanentes du bois associées à la limite de déformation linéaire varient fortement en fonction de l'essence. En conséquence, les contraintes associées à la limite de déformation linéaire ne peuvent utilement servir de base à la détermination de la limite élastique d'une espèce donnée,

— pour des contraintes supérieures à la contrainte correspondant à la limite de déformation linéaire, il semble que la déformation rémanente soit proportionnelle à la contrainte maximum appliquée sauf au voisinage de la rupture,

— d'une manière générale, on peut considérer que la contrainte associée à la limite de déformation linéaire est en moyenne, et à l'exception d'espèces de bois au comportement très particulier, égale aux 3/4 de la contrainte de rupture pour des bois sans défaut. En outre, il semble que la présence de défauts ait une influence plus marquée sur la contrainte correspondant à la limite de déformation linéaire que sur la contrainte à la rupture,

— enfin, la mesure du module d'élasticité apparent pénalise considérablement le matériau bois et ne donne pas une idée exacte des très bonnes résistances mécaniques que peuvent présenter, plus particulièrement, les bois tropicaux. En effet, on a constaté que l'essai de flexion statique avec charge

concentrée entraîne localement une déformation du bois par écrasement qui semble, ce qui paraît assez logique, d'autant plus importante que le bois est tendre. Une certaine quantité d'énergie initialement destinée à la flexion est donc ainsi absorbée en énergie de déformation associée à la pénétration du

couteau dans le bois. Ainsi cette étude préliminaire a permis de faire apparaître un certain nombre de phénomènes qui seront étudiés dans le cadre de travaux complémentaires engagés par la division d'Essais et Emplois des Bois du Centre Technique Forestier Tropical.

## ANNEXE I

### ETUDE DE LA FLEXION STATIQUE D'UNE ÉPROUVETTE PRISMATIQUE SOUMISE A L'ACTION D'UNE CHARGE CONCENTRÉE

SCHEMA DU DISPOSITIF.

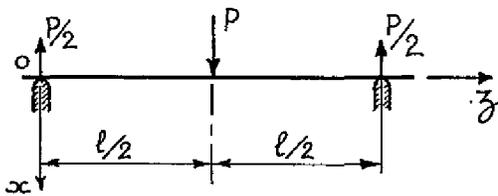


FIG. 15.

EFFORTS TRANCHANTS : ( $T_x$ ).

$$0 < z < \frac{l}{2} :$$

$$T_x = -\frac{P}{2}$$

$$\frac{l}{2} < z < l :$$

$$T_x = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2}$$

MOMENTS FLÉCHISSANTS : ( $M_x$ ).

$$0 < z < \frac{l}{2} :$$

$$M_x = \frac{P}{2} z$$

$$\frac{l}{2} < z < l :$$

$$M_x - P \left( z - \frac{l}{2} \right) + \frac{P}{2} z = -\frac{P}{2} z + P \frac{l}{2}$$

EQUATION DE LA DÉFORMÉE.

$$EIx'' = -M_x$$

avec  $E$  : module d'élasticité

$I$  : moment d'inertie

$M_x$  : moment fléchissant.

$$0 < z < \frac{l}{2}$$

$$EIx'' = -\frac{P}{2} z$$

$$EIx' = -\frac{P}{4} z^2 + A$$

$$EIx = -\frac{P}{12} z^3 + Az + B$$

$$\frac{l}{2} < z < l$$

$$EIx'' = -\frac{P}{2} z + P \left( z - \frac{l}{2} \right)$$

$$EIx' = -\frac{P}{4} z^2 + \frac{P}{2} \left( z - \frac{l}{2} \right)^2 + C$$

$$EIx = -\frac{P}{12} z^3 + \frac{P}{6} \left( z - \frac{l}{2} \right)^3 + Cz + D$$

Conditions aux limites :

1)  $z = 0$  et  $x = 0$  et  $B = 0$ .

2)  $z = \frac{l}{2}$  et  $x_1 = x_2$  et  $x'_1 = x'_2$

$$-\frac{P}{6} \left( \frac{l}{2} \right)^3 + A \frac{l}{2} = -\frac{P}{6} \left( \frac{l}{2} \right)^3 + C \frac{l}{2} + D$$

En identifiant, on a alors :  $D = 0$  et  $A = C$ .

3)  $z = l$  et  $x = 0$

$$0 = -\frac{P}{12} l^3 + \frac{P}{6} \cdot \frac{l^3}{8} + C$$

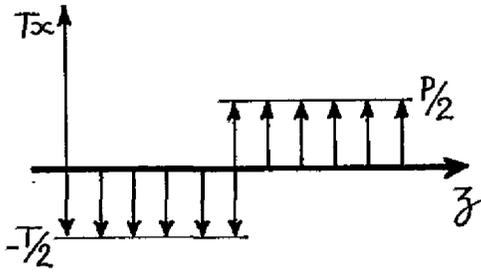


FIG. 16.

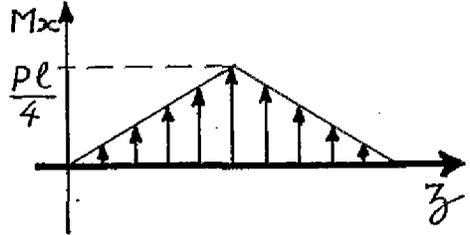


FIG. 17.

$$C = -\frac{P}{48}l^2 + \frac{4Pl^2}{48} = \left(-\frac{P}{48} + \frac{4P}{48}\right)l^2$$

$$C = \frac{3P}{48}l^2.$$

et

$$EIx = -\frac{P}{12}z^3 + \frac{3P}{48}l^2z$$

$$EIx = -\frac{4P}{48}z^3 + \frac{3P}{48}l^2z$$

$$EIx = \frac{P}{48}z(3l^2 - 4z^2).$$

Ex. :

$$z = \frac{l}{2}$$

$$Ml = \frac{Pl}{4}$$

$$EIx = \frac{P}{48} \frac{l}{2} (3l^2 - l^2)$$

$$x = \frac{Pl^3}{48EI}$$

Le tracé des déformées calculées pour une éprouvette présentant un module d'élasticité moyen de 100 000 kg/cm<sup>2</sup> est donné par la figure 21.

## ANNEXE II

### ÉTUDE DE LA FLEXION STATIQUE D'UNE ÉPROUVETTE PRISMATIQUE SOLlicitÉE EN FLEXION CIRCULAIRE PURE

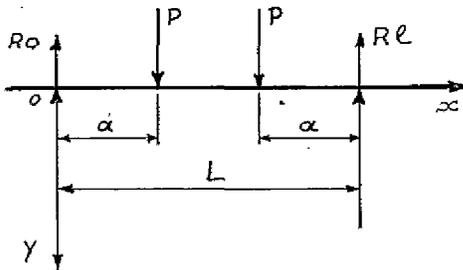


FIG. 18.

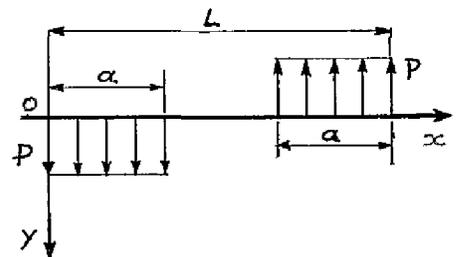


FIG. 19.

$$\vec{R}_0 + \vec{P} + \vec{P} + \vec{R}_l = 0.$$

BILAN DES MOMENTS.

En 0.

donc

$$Pa + P(l - a) - R_l \cdot l = 0$$

$$P - R_l = 0.$$

$$\begin{cases} R_1 = P \\ R_0 = P \end{cases}$$

**EFFORT TRANCHANT.**

Si  $0 < x < a$

$$Tx = -R_0 \text{ et } Tx = -P.$$

Si  $a < x < l-a$

$$Tx = -R_0 + P \text{ et } Tx = 0.$$

Si  $l-a < x < l$

$$Tx = -R_0 + 2P \text{ et } Tx = P.$$

**MOMENT FLÉCHISSANT.**

$$\frac{dM}{dx} = -T$$

1) Si  $0 < x < a$

$$\frac{dM}{dx} = P \text{ et } M_1 = Px + \text{Cte.}$$

$$M_3 = 0 \text{ et } 0 = -Pl + \text{Cte}$$

d'où

$$\text{Cte} = Pl$$

$$M_3 = -Px + Pl$$

$$M_3 = P(l-x)$$

**MOMENTS FLÉCHISSANTS.**

1)  $a < x < a$

$$Ml = Px$$

2)  $a < x < l-a$

$$Ml = Pa$$

3)  $l-a < x < l$

$$Ml = P(l-x).$$

**EQUATION DES DÉFORMÉES.**

$$EIy'' = -Ml.$$

1)  $0 < x < a$

2) Si  $a < x < l-a$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \text{ et } M_2 = \text{Cte}$$

3) Si  $l-a < x < l$

$$\frac{dM}{dx} = -P \text{ et } M_3 = -Px + \text{Cte.}$$

**DÉTERMINATION DES CONSTANTES.**

**Conditions aux limites**

1)  $x = 0$

$$M_1 = 0 \text{ et } M_1 = Px$$

$x = a$

$$M_1 = M_2 \text{ et } M_1 = M_2 = Pa.$$

2)  $x = a$

$$M_2 = M_1 \text{ et } M_1 = M_3 = Pa$$

$x = l-a$

$$M_2 = M_3 \text{ et } M_2 = M_3.$$

3)  $x = l-a$

$$M_3 = M_2 \text{ et } M_3 = Pa$$

$x = l$

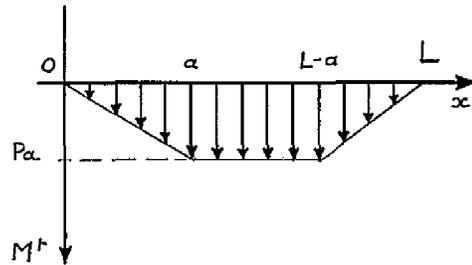


Fig. 20.

$$EIy'' = -Px$$

2)  $a < x < l-a$

$$EIy'' = -Pa$$

3)  $l-a < x < l$

$$EIy'' = -P(l-x).$$

$$1. EIy'_1 = -P \frac{x^2}{2} + A = -P \frac{x^2}{2} + \frac{Pa}{2}(l-a)$$

$$2. EIy'_2 = -Pax + B = -Pax + \frac{Pal}{2}$$

$$3. EIy'_3 = \frac{P(l-x)^2}{2} + C = \frac{P}{2}(l-x)^2 + \frac{Pa}{2}(a-l).$$

CONDITIONS AUX LIMITES.

$$x = a \text{ et } y'_1 = y'_2$$

$$x = \frac{l}{2} \text{ et } y'_2 = 0 \text{ et } + \frac{Pal}{2} = B$$

$$x = l - a \text{ et } y'_2 = y'_3$$

$$y'_2 = -Pax + \frac{Pal}{2} \text{ d'où : } \boxed{y'_2 - Pa\left(\frac{l}{2} - x\right)}$$

1)  $x = a$  et  $y'_1 = y'_2$

$$-P \frac{a^2}{2} + A = Pa \left( \frac{l}{2} - a \right)$$

$$A = \frac{Pal}{2} - Pa^2 + \frac{Pa^2}{2} = \frac{Pal}{2} - \frac{Pa^2}{2}$$

$$A = \frac{Pa}{2} (l - a).$$

2)  $x = l - a$  et  $y'_2 = y'_3$

$$y'_3 = Pa \left( \frac{l}{2} - l + a \right) - Pa \left( a - \frac{l}{2} \right)$$

$$Pa \left( a - \frac{l}{2} \right) = P \frac{a^2}{2} + C$$

$$Pa^2 - Pa \frac{l}{2} = \frac{Pa^2}{2} + C$$

$$C = \frac{Pa^2}{2} - \frac{Pal}{2} = \frac{Pa}{2} (a - l).$$

DÉFORMÉE.

1)  $0 < x < a$

$$EIy_1 = -\frac{P}{6}x^3 + \frac{Pa}{2}(l-a)x + N$$

2)  $a < x < l - a$

$$EIy_2 = -\frac{Pax^2}{2} + \frac{Pal}{2}x + P$$

3)  $l - a < x < l$

$$EIy_3 = -\frac{P}{6}(l-x)^3 + \frac{Pa}{2}(a-l)x + Q.$$

CONDITIONS LIMITES.

$$1 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ et } y_1 = 0 \text{ d'où } \boxed{N = 0} \\ x = a \text{ et } y_1 = y_2. \end{array} \right.$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} x = a \text{ et } y_2 = y_1 \\ x = l - a \text{ et } y_2 = y_3. \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} x = l - a \text{ et } y_2 = y_3 \\ x = l \text{ et } y_3 = 0. \end{array} \right.$$

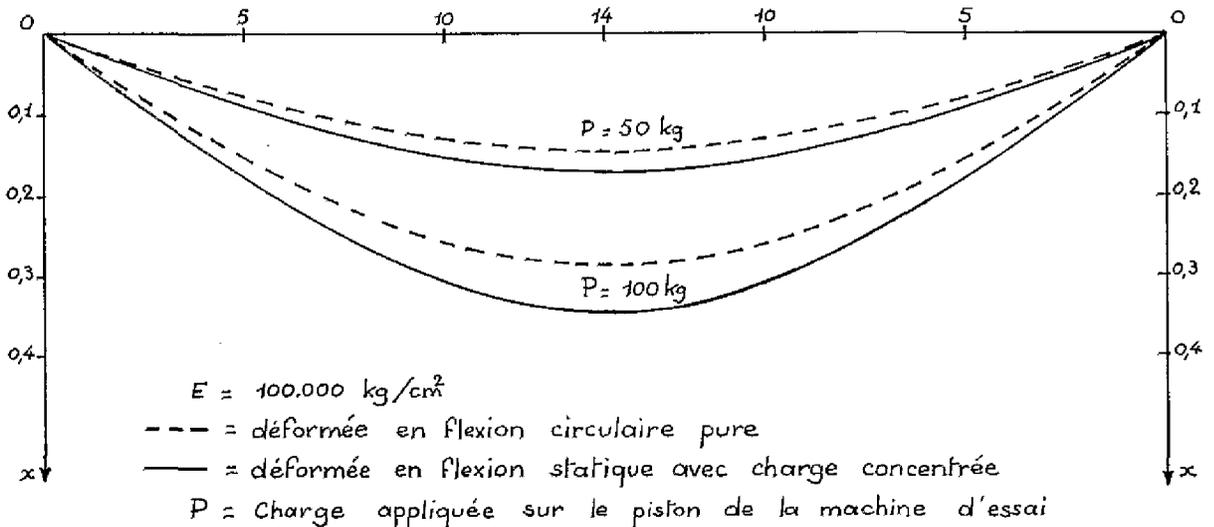
$$x = l \text{ et } y_3 = 0 \text{ et } Q = -\frac{Pa}{2}(a-l)l$$

1)  $x = a$  d'où  $EIy_1 = EIy_2$ .

$$EIy_1 = -\frac{P}{6}a^3 + \frac{Pa^2}{2}(l-a) = -\frac{Pa^3}{2} + \frac{Pa^2l}{2} + P$$

$$-\frac{P}{6}a^3 - \frac{3Pa^3}{6} + \frac{3Pa^3}{6} = P$$

FIG. 21.



$$-\frac{Pa^3}{6} = P$$

$$EIy_1 = -\frac{P}{6}x^3 + \frac{Pa}{2}(l-a)x$$

$$EIy_2 = -\frac{Pax^2}{2} + \frac{Pal}{2}x - \frac{P}{6}a^3$$

$$EIy_3 = -\frac{P}{6}(l-x)^3 + \frac{Pa}{2}(a-l)x - \frac{Pa}{2}(a-l)l.$$

FLÈCHE AU CENTRE  $l/2$ .

$$EIy_2 = -\frac{Pa}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{Pal}{2} \frac{l}{2} - \frac{P}{6}a^3$$

$$= -\frac{Pa}{8}l^2 + \frac{Pal^2}{4} - \frac{P}{6}a^3$$

$$= \frac{3Pal^2 - 4Pa^3}{24}$$

$$= \frac{3Pal^2 - 4Pa^3}{24}$$

$$y_2 = \frac{Pa}{24EI}(3l^2 - 4a^2)$$

FLÈCHE A L'APLOMB DES CHARGES.

$$x = a.$$

$$EIy_2 = -\frac{Pa^3}{2} + \frac{Pa^2l}{2} - \frac{P}{6}a^3$$

$$= \frac{-4Pa^3 + 3Pa^2l}{6} = \frac{Pa^2}{6}(3l - 4a)$$

$$y_2 = \frac{Pa^2}{6EI}(3l - 4a)$$

EXPRESSION GÉNÉRALE DE LA DÉFORMÉE.

$$0 \leq x \leq a :$$

$$EIy = -\frac{P}{6}x^3 + \frac{Pa}{2}(L-a)x$$

$$a \leq x \leq L-a :$$

$$EIy = -\frac{Pax^2}{2} + \frac{PaL}{2}x - \frac{P}{6}a^3$$

$$L-a \leq x \leq L :$$

$$EIy = -\frac{P}{6}(L-x)^3 + \frac{Pa}{2}(a-L)x - \frac{Pa}{2}(a-L)L.$$

#### BIBLIOGRAPHIE SUCCINCTE

SALLENAVE (P.). — Propriétés physiques et mécaniques des bois tropicaux de l'Union Française, Publ. GTFT 1955.

ZELLSTEIN (U.). — Techniques et utilisation des jauges de contrainte, édition Dunod, 1955.

MONNIN (M.). — Normalisation internationale des essais de bois. Imp. 1931. Généralisation des résultats

des essais à élimination de résultats n'ayant aucune signification pour la qualification du bois. Bulletin de la SECTION TECHNIQUE DE L'AÉRONAUTIQUE MILITAIRE. Fascicules 29 et 30.

KOLLMAN (F. F. P.), COTÉ (Fr.). — Solid Wood, Berlin, German Federal, Springer-Verlag 1975, Principles of Wood Science and technology (I).